昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年2月1日発行　第52巻2号　毎月1回1日発行

ISSN 0386―2240

数理科学

2
2014

特集

利用する物理

基礎理論はいかに応用されるか



No.608

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 608 February 2014

利用する物理

基礎理論はいかに応用されるか

数理科学（1月号）前号案内／84
数理科学（3月号）次号予告／84
数理科学バックナンバー一覧／ 4

表紙：戸川　隼人

数理科学特集一覧

63 年/7〜2010 年/12 省略

2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説

2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理

2013 年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは

2014 年/1 波と粒子

数理科学臨時別冊一覧

12 年/7 弦の場の理論
12 年/9 超弦理論の応用
12 年/10 複素多様体論講義
12 年/11 幾何学の量子化
12 年/12 量子力学から超対称性へ
13 年/1 行列解析ノート
13 年/4 無限量子系の物理と数理
13 年/7 現代宇宙論講義
13 年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
13 年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
13 年/12 量子力学ノート
14 年/1 量子情報と時空の物理

February 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 608

特集／利用する物理

巻頭言

兵頭 俊夫

M. ファラデーは1831年，鉄製の輪に2本のコイルを巻き，片方のコイルにボルタの電池をつなぐと，つないだ瞬間と切った瞬間に他方に電流が流れることを確認した．電磁誘導現象の発見である．この発見に対して，ある政治家（W. グラッドストンとされる）から「それが何の役に立つのかね」と尋ねられ，「そのうちあなたの課税の対象となるでしょう」と応えたというエピソードがある．また，ある貴婦人に「ほんの一瞬電気を流したからと言って何の役に立つのでしょうか.」と尋ねられて「生まれたばかりの赤ん坊が何の役に立つかと聞かれても困ります.」と応えたというエピソードもある．これらのエピソード自体は事実でない．そもそもファラデーの興味の中心は自然の仕組みを発見することにあり，それを自ら実用化することに対する意識は希薄だったようだ．しかしそのことは，自分の発見が世の中で使われることに無関心であったことを意味しない．電磁誘導の発見の翌年には早くもそれを利用した発電機が発明されたことに満足を味わっていたのではないか．

ファラデーは電磁気現象を場（電場と磁場）で理解するのに数式を全く使わなかった．しかし，J.C. マクスウェルによればその体系はすでに優れて数学的であり，実際彼はそれを複数の式に表すことに成功した．しかしそれらの式は数が多く複雑であった．それを，ベクトル解析の標準的な表現法を開発しながら，現在われわれが知っている表現にまとめたのは，有線通信の技術開発に一生をささげたO. ヘヴィサイドであった．式の見通しがよくなると，一気に応用しやすくなり，今や，すべての電気機器の製造，また，電気や磁気がかかわるすべての物理学の理論と実験に利用されている．

現在原子核エネルギーと呼ばれている質量エネルギーの利用は，当初，関係者が明確に実用化の可能性を否定していた．橋本毅彦氏のコラムに述べられている原子爆弾の開発の歴史の，前史である．特殊相対性理論の帰結である質量 m とエネルギー E の関係 $E = mc^2$（c は光速）が，1 g の物質が 10^{21} erg（10^{14} J）という膨大なエネルギーに相当することは，誰でも計算できた．当然，質量からエネルギーを取り出す工夫をはじめた人たちは沢山いただろう．やみくもに思いつきを試す人たちと違って，科学者や工学者たちは，それまでに知られている科学的知識と道具立てを使って実用化するあらゆる可能性を探る．A. アインシュタインやE. ラザフォードも，検討の結果それは不可能であると一般向けの講演などで述べていた．これは真剣に検討した科学者たちの共通の結論であり，世界各国で語られていたに違いない．ところが橋本氏のコラムに述べられているように，1939年にO. ハーンとF. シュトラスマンが，熱化した

中性子をウラン235に当てると核分裂反応が起き，その際，平均約2.5個の中性子が発生することを発見すると，話は変わった．それまでの困難を解決しようとして蓄積された知識が一気に有効利用され，1942年にはE. フェルミによる最初の原子炉が稼働し，1945年には原子爆弾が作られた．

本特集では，基礎的な理論や概念が，実社会で応用されるようになる様子を，様々な例で書いていただいた．現代における成果に焦点を当てたので，相対論と量子論が20世紀の2大物理理論であったことを，改めて感じさせるものになった．

齊藤英治氏の「特殊相対論―スピントロニクス」：固体の性質の多様性の根源である電子のスピンはもともと相対論的な性格のものであり，P.A.M. ディラックの相対論的波動方程式にパウリのスピン行列が含まれている．従来，磁性とのからみで応用されることが多かった電子スピンであるが，最近，原子番号の大きな，いわゆる重い元素におけるスピン・軌道相互作用により，スピンの流れととらえられる電子の流れが起きることが分かってきた．これにより，ジュール熱をともなわずに高速で情報を伝達できる可能性を秘めたスピントロニクスの分野が開けつつある．

藤本眞克氏の「一般相対性理論―GPS」：カーナビにも利用されているGPSは複数の専用人工衛星と地表との通信によって行われている．衛星は地表より重力の小さい空間をほぼ円運動しているので，正確な時間合わせには，重力を含む相対性理論である一般相対性理論が必要である．難解な一般相対性理論が身近なテクノロジーに応用される日がこれほど早く来るとは誰が予想しただろうか．

香取秀俊氏の「光格子時計―新しい時間標準」：相対論的補正をする前に時間そのものが正確でなければならない．時間の精度は向上を続け，いくつかの手法がすでに，現在の標準であるセシウム原子時計の精度（15桁）を上回っている．レーザー光の干渉が作る100万個のポテンシャル井戸の中にそれぞれ1個ずつのほとんど静止した原子をとらえ，その観測によって18桁の精度を目指す営みを，開発者自身が述べたものである．

都倉康弘氏の「量子もつれ―量子暗号への道」：量子論は不思議な理論であるが，実験事実を正しく説明する．アインシュタインは，量子的な現象の実験事実は認めるとしても，量子論によるその説明には納得していなかった．そして，その矛盾をあぶり出すいわゆるEPRパラドックスを提唱した．しかし，実際に実験が行われ，アインシュタインが「非常識なのでありえない」とした「普通の量子論的考え方」でなければ説明できないことが明らかになった．そしてこれは量子暗号という量子論の新しい応用を生み出した．

鳥井寿夫氏の「ボース・アインシュタイン凝縮」：M. プランクの空洞輻射の公式は量子論の発展にとって決定的に重要な公式であった．プランクはこれを，実験を説明するための内挿式として求め，ついで，空洞内のエネルギーの計算で発散を避けるために有限の大きさのエネルギー量子を仮定して，導いた．そしてアインシュタインはこれが単なる計算の方便ではなく光の性質であることを見抜いた．一方S. ボースは，光子の1個1個が区別できないと仮定すると統計力学の処方箋でプランクの公式（ボース・アインシュタイン分布の例）を導けることを示した．そしてまたもやアインシュタインが，それが光子の本質であることを見抜いた（後に，スピンが整数の粒子がこの性質を持つことが一般的に示された．光子のスピンは1である）．このようにボース・アインシュタイン分布は，いくつかの独立なひらめきによって到達されたが，その分布の特徴であるボース・アインシュタイン凝縮の実例（超伝導，超流動，メーザー，レーザー）も，それと知らずに実現されてきた．理論の予想に基づいて実現されたのは，中性原子のボース・アインシュタイン凝縮が最初である．

永長直人氏の「物性におけるトポロジーとその応用」：様々な対称性が，物理量の保存則に関連していることはよく知られている．それとは異なる，形（トポロジー）に関係する不変量がある．量子ホール効果のトポロジカルな性格が認識され固体物理学に新しい光が当てられるようになった．形

といえば，3次元の固体には端に必ず2次元の表面があるという特徴があるが，このことと関連して絶縁体の表面にバンドギャップのない状態が発生し得る（トポロジカル絶縁体）という興味深い研究分野が，理論，実験，ともに開けつつあり，理解が深まるにつれて実用化への発展が期待されている．

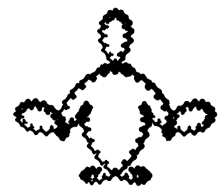
鈴木康夫氏の「ソフトマター物理学とその応用」：ファラデーの数式を使わない体系が，マクスウェルによって定式化され，ヘヴィサイドによって扱いやすくされて爆発的に応用が進んだことを述べたが，固体物理学に比べてすっきりした扱いが難しいソフトマターも，数学的な扱いと，それによる予想を実現する実験によって，何が可能かが明らかになり，物理学に導かれた試行錯誤が可能になった．

鈴木氏のコラムでは，導電性高分子の発見でノーベル賞を受賞したA. ヒーガー氏から見た，基礎と応用の絡み合い，特に有効な応用のために必要な基礎的な考察の重要性についての考え方を紹介している．

今日話題になっている物理学の様々な応用を，各分野の専門家の方々に執筆していただくにあたって，どこまでが基礎でどこからが応用か，あるいは，もっぱら基礎理論であると考えられていたものが実用に使われるようになったきっかけは何だったのか等について，ある程度メリハリをつけて書いていただきたいという，少々無理なお願いをした．しかしもともと，基礎と応用が単純に切り分けられるわけではない．読者の皆様が様々な解釈でお読み下されば幸いである．

（ひょうどう・としお，高エネルギー加速器研究機構）

特殊相対論
スピントロニクス



齊藤　英治

1. はじめに

特殊相対論が必要になる世界は，天体現象や加速器の中の超高速粒子などの日常とはかけ離れた遠い世界に限られると思われるかもしれない．しかし実は，身の周りにある物質中の電子は相対論効果が最も強く効く典型例の一つである．近年のスピントロニクスはこの物質中の相対論効果を積極的に使っている．本稿は，特殊相対論に関連したスピントロニクスの話題を紹介したい．

2. 特殊相対論——時空の幾何学

まずは，特殊相対論を短く整理することから始めよう．

相対論は時空の幾何学である．特殊相対論の重要な知見は，慣性系では **interval**（**世界距離**）と呼ばれる量があり，この量はどの慣性座標系で見ても変わらないという点である．

相対論以前の世界観でも，**物の長さ**などは，どの座標系で見ても変わらない**不変量**であると認識されていた．例えば，ある棒を片目をつむって様々な角度から見ると，見る方向によって棒の見た目の長さが異なって見える．しかしこれはもちろん，見る方向によって棒の長さが実際に変わっているわけではない．棒の長さ ΔL は棒が持つ不変な量であって，見る方向によって長さが異なって見えるのは，目が，棒のある射影成分を見ているからに過ぎない．これが，日常の経験から獲得している物の長さに関する世界観である．

三平方の定理を利用すれば，この世界観を簡単な算数で表すことができる．棒の x, y, z 座標軸への射影成分をそれぞれ Δx, Δy, Δz とすれば，三平方の定理によって

$$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{1}$$

が不変量である棒の長さ（の自乗）である．x 方向についてこの棒を見たときには長さ Δx に見える．棒が x 方向を向いているときは，$\Delta L = \Delta x$ であるが，この棒を別の方向 θ から見るときには，座標系を回転変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

すればよい．簡単のために，回転は xy 面内に制限した．実際，棒の一方の端を原点にとってこの回転変換をした場合，三角関数の関係式

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{3}$$

によって (1) は不変に保たれ，棒の長さは不変であることが保障されていることがわかる．

このような相対論以前の世界観では，物体の長さという不変量には時間座標 t は入らず，時間はどの座標系からみても同様に進むと信じられてきた．従って，長さどうしを自由に足し算することも，長さを時間で単純に微分することも許される．例えば，時刻 $t=0$ で重なっていた2つの座標系 K, K' を用いてある質点を表した座標を (x, y, z), (x', y', z') とし，座標系 K' が座標系 K に対して x 方向に速度 v で移動していると，x と x' は $x' = x - vt$ で結ばれる．この式は，我々が日常経験する v が余り大きくない状況（正確には，後述するように光の速さよりも十分小さいとき）では，当たり前に成り立つ式として認識されている．この式を時間で微分すれば，それぞれの座標系 K, K' で観測した速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}$ の間の関係式

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + v \tag{4}$$

が得られる（高校で習う相対速度の式である）．このよ

うな演算が許されるのは，人間が日常の経験から培った「長さは不変量であり，時間 t はどの座標系から見ても同様に進む」という常識を認めているからである．相対論の主張はこの常識を覆すものであった．

特殊相対論の出発点は，**光速不変の原理**である．相対論が建設された時代は，光の速さ c はどのような慣性座標系で観測しても必ず同じ値になる，という驚くべき知見が徐々に明らかになった時代でもある．これは速度の合成式 (4) と明らかに矛盾し，そう容易くは受け入れられなかった．例えば，光速不変を原理として認めると，速度の合成式 (4) と矛盾するように見える．しかし，ここで発想を大きく転換し，実は (1) の「物の長さ」は真の不変量ではなく，(1) に時間成分も付け加えた

$$\begin{aligned} -\Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \\ &= \Delta L^2 - c^2 \Delta t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

こそが慣性系での不変量である，と変更すると矛盾が一気に解消される．(5) は，相対論以前で不変量とされていた「長さ」ΔL も成分として含み，光速が不変であることを表現する式（$\Delta s = 0$ のとき (5) は $|$光の進んだ距離$/\Delta t| = c$）も含むように拡張された不変量である．(5) の表す世界観は，驚くことに物の長さ ΔL や時間差 Δt は一般には不変な量ではなく，見る座標系によって異なって見えるということを意味する．物の長さの代わりに現れた不変量は，$\Delta L^2 - c^2\Delta t^2$ で書かれ，これは interval と呼ばれる．

interval を不変に保つ変換を考えよう．簡単のため，空間座標成分として x だけに注目し，$x^2 - c^2t^2$ を不変に保つ変換を考えると，(3) を参考に，数学公式 $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ を用いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ &= \cosh\theta \begin{pmatrix} 1 & -\tanh\theta \\ -\tanh\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

を得る（$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ を用いれば，この変換によって $x^2 - c^2t^2$ の値が変わらないのは明らかである）．θ を決めるためには，相対論を考えない世界でも位置 x と時間を混ぜる慣性系間の変換があることを利用すれば良い．(4) の速度の合成式である．速度の合成式は v が十分小さいときには正しいことがわかっているので，v の小さい極限で (6) は (4) に一致する必要があり，従って $\frac{v}{c} = \tanh\theta$ とする必要がある．$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ を使って整理すると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる．このような慣性系間の座標変換を**ローレンツ変換**と呼ぶ．ローレンツ変換は光速不変の原理を前提に作られているので，この変換から作った速度の合成則は，光速不変の要請を自動的に満たしている．

ローレンツ変換の重要な点は，変換によって長さや時間が混ざって変換されることであり，従って長さや時間は見る座標系によって異なって見えることになる．例えば，運動している物体の長さは $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 倍に縮んで見えることが (7) から直ちにわかる（物体の両端を同時刻で観測することを考えれば良いので，(7) の右辺で $t=0$ とし x を測定すると考えればよい）．(7) を見てわかるように，速度が光速に近づくと，特殊相対論の効果は顕著になる．

ローレンツ変換で長さや時間が変換されるということは，長さや時間から構成される様々な物理量が観測する座標によって変わることになる．従って，相対論以前から使われていた多くの物理量についても，ローレンツ変換によってどのように変化するのかを調べておく必要がある．(7) の変換を用いて計算を行うと，色々な物理量の間に似たような変換式が成り立つことがわかり，例えば電場 $\boldsymbol{E}$ については

$$\boldsymbol{B}'_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}\right) \tag{8}$$

のようにその一部が磁場 $\boldsymbol{B}$ に変換され，磁気双極子モーメント $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{P}'_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(\boldsymbol{P}_{\mathrm{t}} - \varepsilon_0 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{M}_{\mathrm{t}}\right) \tag{9}$$

のように，その一部が電気双極子モーメント $\boldsymbol{P}$ に変換されることを導くことができる．下付き t は座標系（観測者）の運動方向に垂直な成分からなるベクトルを意味する．このように，観測者が速度を持つことによって異なる物理量の間に変換が生じることが相対論効果の特徴である．

3. 固体中の電子と特殊相対論

さて，ここから物質中の電子に目を転じよう．物質中の電子の振舞いには，相対論効果が強く効く場合が

非常に多い．第一に，物質中の電子は非常に高速になる場合がある．例えば，白金の内核電子は光の速度の57% 程度もの大変早い速度で回っている．さらに，電子は古典的粒子ではなくフェルミ粒子なので，物質中で高密度になった電子は1万度を超える高いフェルミ温度を持ってフェルミ縮退しており，大きなフェルミ速度を持っている．

固体中の電子の波動関数は平面波ではなく固体の周期構造が反映されたブロッホ波を作っているため，速度の概念が単純でなくなる．まず，電子の個々の速度とも言うべき**フェルミ速度**がある．一方で，伝導電子のドリフト運動を決めるのはフェルミ速度ではなくブロッホ波の包絡線の運動を決める**群速度**である．このように電子の運動の速度の概念が複雑なので，前節で考えたような単純なローレンツ変換をそのまま使うことはできない．物質中の電子についての相対論効果の正しい取扱いは，特殊相対論と量子論を組み合わせることで導かれた電子の相対論的量子論（ディラック方程式）を周期構造系に対して用いる必要がある．その結果は，上記の古典的な特殊相対論の場合と同じ形の式が現れるが，係数は物質の電子構造に依存したものになり，多くの場合真空中と比べ圧倒的に大きくなる．直感的には，電子の運動を記述するドリフト運動はブロッホ波の包絡線のみを取り出してその運動を考えれば良いのであるが，包絡線の運動のみを取り出してブロッホ関数など他の自由度を消すしわ寄せを係数に吸収させるために，様々な変換係数が非常に大きくなり得るのである．このような効果は，ブロッホ波の包絡線の中の振動が激しい物質（例えばPt）ほど顕著になる．

もう一つ重要な要素は，固体中のミクロの電子は著しく強い電場に曝されている点である．原子核の持っている電荷は大変大きく，もしこれが電子によって遮蔽されていなければ，とても大きな電場を生み出す．人間の日常生活のスケールでは，電荷が存在すれば直ぐに逆符号の電荷が集まってきて，遮蔽，中性化され，巨大な電場を経験することはほとんどない．しかし，電子による遮蔽には特徴的な長さスケールがあり，この長さスケール以下の電荷分布を遮蔽することはできない．従って，原子核のごく近傍のミクロな領域では原子核の作る巨大な電場の一部は，遮蔽されずに残る．伝導電子や原子に束縛された電子は，このような遮蔽されずに残った強い電場を感じ，相対論効果と結びつくことができる．このような例を，以下に2つ紹介する．

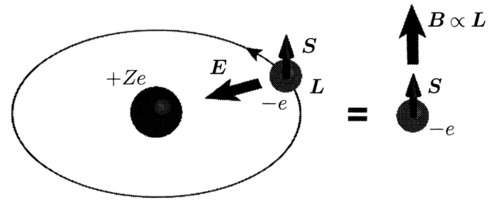


図1　原子やイオンに束縛された電子の相対論効果．

4. 相対論効果の具体例

4.1 イオンに束縛された電子の相対論効果

まず，原子やイオンに束縛されている電子を考えよう．空間に孤立した原子内の電子は等方的である．しかし，原子やイオンが結晶に組み込まれ，さらに結晶の対称性が低いと（ある方向の格子定数が大きいなど），等方性が破れ特定の方向にのみ回転しやすくなる．前述したように電子の周回速度は非常に早く，かつ原子核近傍では核が作る強い電場に曝される．従って，電子に乗って回転運動する座標系で見ると，強い核電場がローレンツ変換 (8) によって回転軸に沿った強い磁場に変換される（図1）．強い磁場があれば，スピンはその方向を向きやすくなるので，このような対称性の低い磁性体結晶中のスピン磁気モーメントは特定の軸に強く揃えられる．このような性質を**結晶磁気異方性**と呼び，強力な磁石を作るためには不可欠な方法である．身の周りにある強い永久磁石のほとんどすべてにおいて，この性質が利用されている．つまり，手で引き離せないほど強い磁石という形で，固体中の相対論効果をいつでも体験することができるのである．

4.2 固体中の伝導電子の相対論効果

一方で，伝導電子から見た原子核の作る電場の効果は，原子核が周期的な結晶構造を組むことで打ち消されてしまう場合が多い．しかし，不純物や表面など周期構造を乱す部分では打ち消されずに有限に残る．ここでは，固体中の不純物近傍の電場と伝導電子の相互作用について考えてみよう．

結晶の中に不純物があり，不純物原子核が周囲の結晶の原子核よりも多くの正電荷を持っている状況を考える．不純物原子核の近傍の核電場は完全には遮蔽されずに残っており，遮蔽されていないクーロン電位の強さは $1/r$ に比例することからもわかるように，原子核のごく近傍の電場は非常に大きくなる可能性がある．具体的にどのくらいの電場が遮蔽されずに残るかについては，不純物原子近傍の多体波動関数を求めること

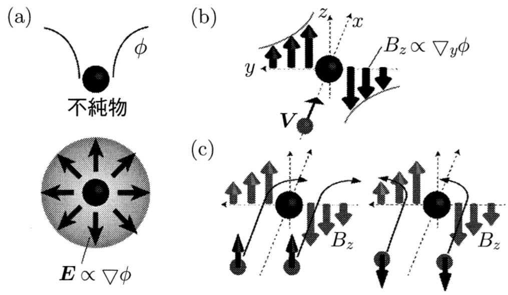


図 2　固体中の不純物近傍の量子相対論効果. (a) 不純物近傍の電気ポテンシャルと電場分布, (b) その電場分布を速度 v で動く電子から観測することによって現れる磁場分布と, (c) その磁場分布中を動く電子の軌道運動.

によって知ることができる.

さて, 図 2(a) のような不純物の周りで遮蔽されずに残った電気ポテンシャルを考える. 電場は矢印で表されている. この電場を運動する伝導電子から観測すると, ローレンツ変換 ((8) を参照)

$$\boldsymbol{B}'_{\rm t} \propto \left(\boldsymbol{B}_{\rm t} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}_{\rm t}\right)$$

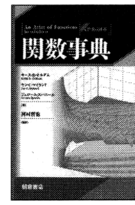
によって電場 $\boldsymbol{E}$ の一部は磁場 $\boldsymbol{B}$ に変換される ($\boldsymbol{v}$ の定義によって変換係数は変わるが, 詳細についてはここでは立ち入らない). この磁場 $\boldsymbol{B}$ を, 図 2(b) に示す.

まず, 上向きスピンの電子が不純物近傍の左側に侵入した場合を考えよう (図 2(c) の一番左). ローレンツ変換により電場から生成された磁場 $\boldsymbol{B}$ と電子のスピン磁気モーメント $\boldsymbol{s}$ の間には, **ゼーマン相互作用** $E = -\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{B}$ が働く. 従って, 上向きスピンの電子は, スピンに平行な磁場の強い方向に引き寄せられるので, 図 2(c) の右方向へ曲げられることになる. 同じ電子が不純物近傍の右側に侵入するときも, 同様の考察によって右方向に曲げられることがわかるので, 図 2(c) 左のような不純物近傍の強い電場の相対論効果によって, 上向きスピンはいつでも右向きに曲げられることがわかる. 一方, 下向きスピンの電子について同様に考えると, 電子はいつでも左方向へ曲げられることになるので, 不純物近傍の電場によって電子が曲げられる方向がスピンの向きに依存して変わる, という面白い状況になっている.

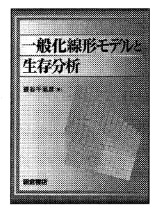
この描像は以下のようにモデル化できる. 電子スピンと核電場との相互作用ハミルトニアンは,

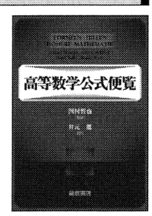
$$H_{\rm SO} = \lambda\,(\nabla V_{\rm imp}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \qquad (10)$$

のように書くことができる. これは, スピン軌道相互











作用と呼ばれ，λ は固体中で増強された相対論効果を表現する係数である．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ は伝導電子の運動量とスピンである．括弧の中は，不純物核がつくる電場 $-\frac{1}{e}\nabla V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{r})$ がローレンツ変換によって磁場に変わった成分を表していると解釈できる．ベクトル解析の公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$ を用いると，このハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{SO}}=\lambda(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{p} \tag{11}$$

と書きかえることができ，これを $\boldsymbol{p}$ で偏微分することにより，速度

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H_{\mathrm{SO}}}{\partial p}=\lambda(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla V_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{r})) \tag{12}$$

を得ることができる．この $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ を時間 t で積分することで，不純物周りの電場によって電子の軌道が横にずれる量 $\Delta\boldsymbol{r}$ が得られ，これはスピン $\boldsymbol{\sigma}$ に依存する．この機構は，**サイドジャンプ機構**と呼ばれる．

5. スピン流とその生成

さて，上記のような固体中の伝導電子の相対論効果を使うと，固体中の「**スピン流**」という量を電気的に検出，利用することが可能になり，スピンを取り込んだ新しいエレクトロニクス「**スピントロニクス**」が大きな話題になっている．ここで，スピン流という概念を簡単に説明しておこう[1)]．

もし，伝導電子の集団の速度分布が図 3 下図のようなタイプのアンバランス，即ち，ある方向に進む電子とそれと逆方向に進む電子は，互いに逆向きのスピンを持ち易いという傾向が少しでもあるとき，何が起こるのであろうか？ このときは，両方向に進む電子の数は同じであるので，電荷の流れは打ち消し合い正味の電流はゼロである．一方，スピンの流れは打ち消されずに残っている．図 3 下図でスピンの収支を考えれば，このアンバランスは試料右端の上向きスピンを増やし（= 下向きスピンを減らし）左端の上向きスピンを減らす（=下向きスピンを増やす）ので，左から右へ上向きスピンの流れがあることになる．このように，電流ゼロのままでスピンの流れだけを作ることができ，これを伝導電子の運ぶ純スピン流と呼ぶ．スピンの z 成分が良い量子数の場合，スピン流は

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{j}_{\uparrow}-\boldsymbol{j}_{\downarrow} \tag{13}$$

と z 方向に平行なスピンをもつ電子流を $\boldsymbol{j}_{\uparrow}$ と z 方向に反平行なスピンをもつ電子流を $\boldsymbol{j}_{\downarrow}$ の差で表現される．この場合，電流は

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{j}_{\uparrow}+\boldsymbol{j}_{\downarrow} \tag{14}$$

と書ける．スピン流を作り出す方法は多数知られているので，興味のある方は文献 1) を参照されたい．

6. スピン流の測定：逆スピンホール効果

スピン流はどのように測ればよいだろうか？ 電流を精密科学の対象にしたのは，電流の測り方の発見であった．電流を流すと，図 4 (a) のように電流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}$ の周りに円形に磁場 $\boldsymbol{H}$ が生じる．この発見によって，電流のつくる磁場がもたらす力を測ることで電流の測定ができるようになったのである．これは，体系化された電磁気学においてはマックスウェル方程式の一つ

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} \tag{15}$$

として表されている．

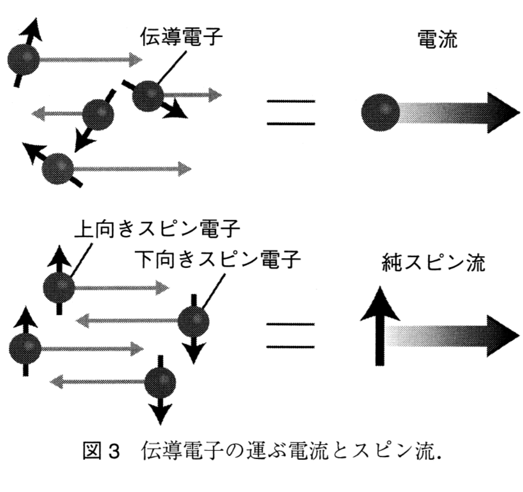


図 3　伝導電子の運ぶ電流とスピン流．

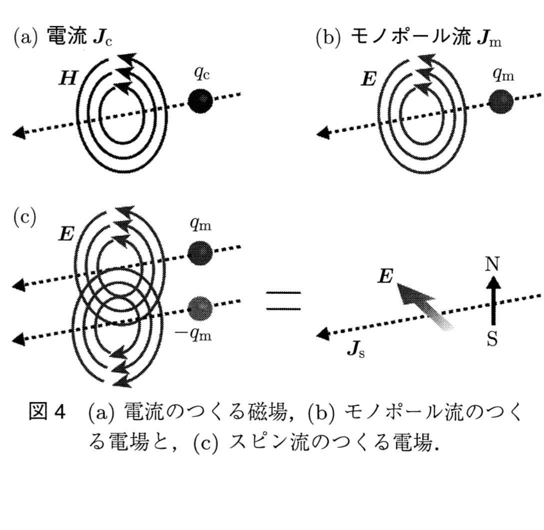


図 4　(a) 電流のつくる磁場，(b) モノポール流のつくる電場と，(c) スピン流のつくる電場．

ところで，もし電荷の流れではなく磁荷（N 極や S 極）の流れがあったら何が起きるはずだろうか？ 電気と磁気には双子のように似通った現象があることが知られており（電磁双対性と呼ぶ），もし磁化の流れ「磁気モノポール流」があれば，図 4 (b) のように周りに電場が生じるはずである．もちろん，電磁気学によれば現在この世界には磁気モノポールはないので，このような磁化だけの流れも単独では存在しない．しかし，磁気モーメントの流れは逆符号の磁気モノポール流の対と見なすことができる．具体的には，磁気モーメント m は磁化 q_{m} が l だけ離れているとして $q_{\mathrm{m}}l = m$ を保ちながら（q_{m} は変化させながら）磁化間の距離ゼロ $l \to 0$ の極限をとったものである．こう考えると，磁気モーメント m の流れは，磁気モノポール流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = Q_{\mathrm{m}}v$ の作る電場（図 4 (b)）と，それと l だけ離した逆向きの磁気モノポール流 $-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$ を，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}l$ を一定に保ちながら無限に近づけたときに対応する電場である図 4 (c) のような電場を作るはずであることに気付く．

これと同じ結論は，特殊相対論を使っても導くことができる．ローレンツ変換を用いると，速度 v で運動する磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{P} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\varepsilon_0 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{M}\right) \qquad (16)$$

と変換される．ε_0 は真空の誘電率である．この式は，磁気モーメントの一部が小さな電気双極子モーメント $\boldsymbol{P}$ に変換されることを表しており，この電気双極子モーメントの作る電場はまさに図 4 (c) に示したものである．

さて，真空中の磁気モーメントの流れが電場を作ることがわかった．次に，量子力学で記述される物質中の電子スピンの流れについて考えを進めよう．物質中の電子のスピンと古典的磁気モーメントの間には相違点もあるが，対称性としては同じ電場を作るものと期待できそうであるが，固体中の量子効果をきっちりと考える必要がある．本稿ではそのすべてを議論することは不可能なので，強いサイドジャンプ機構によってスピン流が電場に変換される可能性のみを検討する．

非磁性の金属中へ電流を流す．電流は様々なスピンの電子を含んでいるが，この電子が不純物近傍を通過すると，サイドジャンプ機構によって互いに逆方向のスピンをもつ電子は逆方向の速度を得る．この電子の運動を電流に垂直な方向で見ると，不純物近傍を通過すると逆向きのスピンが逆方向に動いている（図 5 左）．これは，電流を流すと垂直方向にスピン流が誘起されていることを意味している．この電流から垂直方向のスピン流を生成する現象を**スピンホール効果**と呼ぶ．

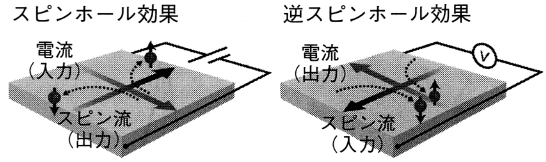


図 5　スピンホール効果と逆スピンホール効果．

逆に，金属にスピン流を流すことを考える．これは，スピン流に沿って逆向きに進む電子は逆向きスピンを持つ傾向があることを意味している．この 2 つの電子は運動の向きもスピンの向きも両方とも逆向きなので，スピン軌道相互作用はこの 2 つの電子を同じ方向に曲げる．その結果，確かにスピン流に垂直方向に電流や起電力が作られる（図 5 右）！ このような電流によって導体表面に電荷が蓄積され，図 4 (c) と同じ形の電場を外部につくるので，この効果は固体中で増強された図 4 (c) と同じ対称性をもった効果と見なすことができる．スピン流によって電場が作られるこの効果は，スピンホール効果の逆効果という意味で**逆スピンホール効果**（ISHE）と名付けた．

サイドジャンプの他にも固体中の伝導電子の軌道運動とスピンを結びつける機構が複数あり，何れもスピン流から図 4 (c) と同じ対称性の電場を生み出すことが見出されている．

逆スピンホール効果は，スピン流の電気的検出やスピン流の電気エネルギーへの変換，スピントロニクスとエレクトロニクスのインターフェースとして現在頻繁に利用されている．逆スピンホール効果がはじめて測定された実験の一つは，NiFe 磁石と Pt 金属の複合薄膜において，磁石層から Pt 層に注入されたスピン流を Pt 層の逆スピンホール効果起電力として検出した実験（図 6）である[2]．磁場中の磁化は磁場の周りを歳差運動（すりこぎ運動）をするが，この歳差運動と同じ振動数の交流磁場（マイクロ波）を加えることによって，歳差運動の振幅が共鳴増大する．これを，強磁性共鳴と呼ぶ．この実験では，NiFe 磁石中に強磁性共鳴による大きな磁化歳差運動が起きると，**スピンポンピング**と呼ばれる現象（スピンの電磁誘導とも見なすことができる現象である[1]）によって磁石から Pt に大量のスピン流が注入される．このスピン流がもたら

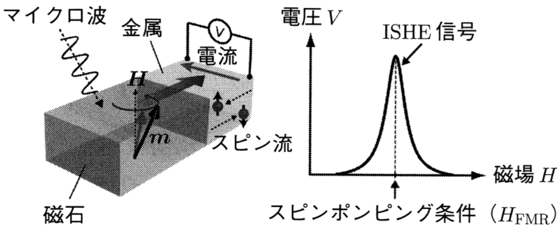


図 6　スピンポンピングによるスピン流生成と逆スピンホール効果.

す逆スピンホール効果起電力が観測された．Pt はスピンホール効果・逆スピンホール効果を示す典型的な物質である．ほぼ同時期に，非局所配置法と呼ばれる別の方法を用いた実験も行われた．興味のある方は，文献 3) をご覧頂きたい．

その後，同じ効果をマイクロ波の代わりに熱を用いることでも起こすことが可能になり，スピンと相対論効果を用いて熱からスピン流や電気を作ることができるようになった．この効果は**スピンゼーベック効果**と呼ばれ，新しいエネルギー変換技術としても注目されている[4)]．

7. まとめ

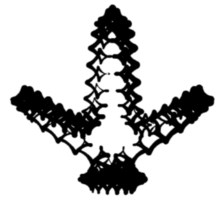
本稿のメインメッセージは，固体中では相対論効果が顕著に現れることが多く，これを利用することで従来観測すらできなかった固体中のスピン流にアプローチできるようになった，という点である．なお，本稿では触れる余裕がなかったが，一般相対論の手法を用いて非慣性系におけるスピン流の面白い現象も見出されつつある．ご興味のある方は，文献 5) をご覧頂きたい．

参考文献

1) S. Maekawa, S.O. Valenzuela, E. Saitoh, T. Kimura, eds., *Spin Current* (Oxford university press, 2012).
2) E. Saitoh, *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, **88** (2006), 182509.
3) T. Kimura, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007), 156601.
4) K. Uchida, E. Saitoh, *et al.*, *Nature*, **455** (2008), 778.
5) M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, and S. Maekawa, *Phys. Rev. Lett.*, **106** (2011), 076601.

（さいとう・えいじ，東北大学原子分子材料科学高等研究機構，金属材料研究所）

一般相対性理論
GPS



藤本 眞克

1. はじめに

今日カーナビや携帯電話・スマホなどで位置情報を獲得するためにGPSが日常的に使われている．GPSでは正しい位置情報を得るために相対性理論が使われる．相対論的効果を正しく取り入れることなしに数メートル以下の精度で位置決定を行うことはできない．

本稿では特殊および一般相対性理論の中心となる概念について簡単に説明したのちに，GPSに対してこれらの理論がどのように利用されているのかを解説する．

2. 相対性原理

はじめに相対性理論の名前の由来でもある**相対性原理**について説明しよう．

高い塔の上から石を落とすと，石は真下に落下する．地球が動いているなら石の運動にその影響が現れるはずだ，とする天動説を支持する側の主張に対してガリレイは，石も観測者も地球と一緒に動いているために鉛直方向の落下運動のみが観測されるのであって，地球が静止している証拠とはならないと論駁した[1]．これが**ガリレイの相対性原理**である．

ニュートンが定式化した力学の法則で説明しよう．ニュートンの第一法則「物体は外力が働かなければ等速直線運動（静止も含む）を続ける」が成立するような**慣性系**において，以下の運動の法則（ニュートンの第二法則）が成り立つ．

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}. \tag{1}$$

ここで $m, \vec{v}, \vec{F}$ はそれぞれ物体の質量，速度ベクトルと外力のベクトルである．

ある慣性系に対して一定速度 $\vec{V}_0$ で運動する別の系では

$$\vec{v}\,'=\vec{v}-\vec{V}_0 \tag{2}$$

となり，m と $\vec{F}$ は $\vec{V}_0$ によらない量と考えられるので，その系でも (1) 式が成り立つ．さらに $\vec{F}=0$ とすると等速直線運動（$\vec{v}\,'=$ 一定）になるので，その系も慣性系である．このようにガリレイの相対性原理では，「互いに等速直線運動をしているすべての慣性系において同じ運動法則（(1) 式で与えられる）が成り立つ」ことを主張している．

3. 特殊相対性理論

ガリレイの相対性原理では (2) 式で表されるように**速度の加法性**が成り立つ．それでは電磁気学の法則に対しても同様か，ということが電磁気学の成立に伴って問題となってきた．電磁気学を定式化したマックスウェルの方程式によって存在が予言された電磁波の一種である光の速度に対しても，ガリレイの相対性原理に基づけば (2) 式のような速度の加法性が成り立つことになる．しかしながら，光速度に対する加法性は地球の運動を利用したマイケルソンとモーリーの実験によって否定され，相対性原理自体が否定されそうになった．これを救ったのがアインシュタインの**特殊相対性理論**である[2]．アインシュタインは電磁気学についても相対性原理が成り立つとし，電磁法則を代表するものとして光速度の不変性を**光速不変の原理**として理論構築の基礎に置いた．ガリレイの相対性原理では矛盾する2つの原理を両立させるために，唯一で絶対的なものと考えられてきた時間の概念に切り込み，時間も運動に伴い変化する相対的なものと考えることで，特殊相対性理論に到達した．

特殊相対性理論では，ある物理的事象が何時何処で起こっているのかを，一つの慣性空間（3次元）に時間の次元を加えた4次元時空間内のある点 (ct, x, y, z) で表す．その慣性系に対して一定速度（簡単のために x 方向に V）で運動する別の慣性系で同じ事象を (ct', x', y', z')

によって表すと

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\left(ct - \frac{V}{c}x\right),$$
$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}(x - Vt),\quad y' = y,\quad z' = z \tag{3}$$

の関係がある．

2つの事象AとB（添字で表す）に対して(3)式から

$$\begin{aligned} s^2 &= -c^2(t_A - t_B)^2 + (x_A - x_B)^2 \\ &\quad + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 \\ &= -c^2(t'_A - t'_B)^2 + (x'_A - x'_B)^2 \\ &\quad + (y'_A - y'_B)^2 + (z'_A - z'_B)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つことがわかる．ここで s は2つの事象間の**インターバル**と呼ばれ，どの慣性系でも変わらない不変量である．AとBを隣接する事象として微分形式で表した

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5}$$

を不変量として用いることもある．(4)式や(5)式が成り立つ4次元時空間はミンコフスキー空間と呼ばれ，そこでは特殊相対性理論が成り立つ．特殊相対性理論にはこれ以上立ち入らないが，後の応用のために(5)式から運動する時計の遅れを導くことにしよう．(5)式で記述される座標系（静止系と呼ぶことにする）に対して速度 v で運動する一つの時計を考えよう．

この時計を静止系で記述すると，$v^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/dt^2$ であるが，時計と一緒に等速運動する座標系で記述すると $v'^2 = 0$ なので，(5)式をそれぞれの系で書くと

$$ds^2 = -c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -c^2d\tau^2 \tag{6}$$

となる．ここで時計とともに運動する座標系での時間成分を τ で表した．この τ は時計に付随した固有の時間であるため，**固有時**と呼ばれる．(6)式から

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,dt \tag{7}$$

の関係式が導かれる．これは運動する時計の刻み $d\tau$ が静止系での時間の刻み dt に比べて $\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍だけ小さいこと，すなわち遅れることを表している．

4. 一般相対性理論

特殊相対性理論における相対性原理では，互いに等速運動する慣性系の間で物理法則が同じであることを要請するものであった．アインシュタインはこれをさらに進めて，慣性系でない一般的な座標系の間でも物理法則が同じとする**一般相対性原理**に基づいた理論，**一般相対性理論**を構築しようとした．その手がかりとして彼が採用したのが，重力における**等価原理**である．それを説明するために，物体が地球の重力を受けて落下する場合を考えよう[3)]．物体の運動方程式は，$m_I d^2x/dt^2 = -m_G g$ で与えられる．ここで m_I は物体の**慣性質量**，m_G は**重力質量**を表し，x 軸は重力と逆向きを正の方向にした．慣性質量と重力質量は概念的に別の量であるが，ガリレイがピサの斜塔での落下実験などで示したように，物体の種類や組成によらず等しいことが経験則として知られていた．アインシュタインはこれを理論構築のための原理として採用したのである．等価原理が正しいとすると，どのような物体の重力落下運動も

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{8}$$

に従う．これがニュートン力学における慣性系での運動の記述であるが，この慣性系に対し等加速度 $a = -g$ で運動する系に座標変換：$x = X + at^2/2$ によって移ると，(8)式は

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -a - g = 0 \tag{9}$$

になる．一方，重力がない場合には $d^2X/dt^2 = -a$ となり，みかけの重力が現れる．このように，重力があっても重力落下運動と同じ加速度をもつ等加速度系では慣性の法則が成り立つように見え，逆に重力がなくても等加速度系ではあたかも重力落下運動が起きているように見える．

そこで，発想を転換して(9)式をニュートンの第一法則のように慣性系を定義しているものと考えたらどうだろうか？ 重力があるときには，重力落下している系を慣性系と考え，ニュートン力学で考えていた慣性系はもはや慣性系ではないと考えるのである．

ここまでの議論では重力を大きさと方向が場所によって変わらないもの（一様重力）として扱ってきた．しかし，実際の重力はニュートンの重力法則（万有引力の法則）からも分かるように大きさも向きも場所によって異なる．そのため，上の議論は近似的に一様重力と見なせる狭い範囲で成り立つものである．より厳密には，場所ごとに，その場所でのみ成り立つ局所的な考え方であり，アインシュタイン流の慣性系は**局所慣性系**と呼ばれる．

アインシュタインはそれまでの大局的な慣性系の概念を捨て局所慣性系の考え方を推し進めるため**曲がっ**

た時空間を導入した．地球表面を例にとると，我々が生活する範囲では地面は平坦と見なすことができ２地点間の最短距離は直線になる．一方，大局的には球面であり，遠く隔たった２地点間の最短距離は大円の円弧である曲線になる．力学現象では，直線が等速直線運動に対応し，曲線は重力を受けての軌道運動（重力以外の外力が働かない運動は**自由落下運動**と呼ばれる）に対応している．

慣性系の議論に戻ろう．上の議論は力学法則に対するものであったが，特殊相対性理論では電磁気学についても相対性原理が成り立っていた．それでは，ニュートンとアインシュタインが考える慣性系のどちらで電磁気学の相対性原理が成り立つのであろうか？

その答えは重力赤方偏移の実験で示されている．いま地表から上向きに光を発射し，高さ h の場所で受信したとする．発射時の光の周波数を ν_{e}，受信時を ν_{r}，地表での重力加速度を g とすると，

$$\frac{\nu_{\mathrm{e}}}{\nu_{\mathrm{r}}}=1+\frac{gh}{c^2} \tag{10}$$

に従って，受信する光の周波数が発射時より低くなることが実験的に確かめられている[4]．この現象を**自由落下系**で考えてみると[5]，発射の瞬間に静止から自由落下にうつった座標系は，光が上に届くまでの時間 (h/c) に下向きに加速され，速度 $g(h/c)$ を得る．そのため，この自由落下系で受信する光の周波数 ν'_{r} と受信点に静止した系で測った周波数 ν_{r} は，ドップラー効果により，

$$\frac{\nu'_{\mathrm{r}}}{\nu_{\mathrm{r}}}=1+\frac{g(h/c)}{c} \tag{11}$$

の関係にある．(11) 式と (10) 式を比較すると，$\nu_{\mathrm{e}}=\nu'_{\mathrm{r}}$ となり，発射時点では自由落下系も速度０なので $\nu_{\mathrm{e}}=\nu'_{\mathrm{e}}$ だから，結局自由落下系では $\nu'_{\mathrm{e}}=\nu'_{\mathrm{r}}$ が成り立つ．すなわち自由落下系においては光の周波数が一定のままで伝搬するという電磁気学の法則が成り立ち，自由落下系が慣性系として振る舞う．

(10) 式は発射と受信の２地点での重力ポテンシャルの差 $\Delta\phi$ を用いて

$$\frac{\nu_{\mathrm{e}}}{\nu_{\mathrm{r}}}=1+\frac{\Delta\phi}{c^2} \tag{12}$$

と表すことができ，後述するようにGPSでも（時刻の刻みは原子時計の周波数に反比例するので，時間の関係式として）使われる．

アインシュタインは重力の効果を曲がった時空間の幾何学として表すことを着想し，時空間の各点での局所慣性系で通常の物理法則が成り立つと考えた．彼はさらに慣性系に限らない一般座標系においても物理法則が同じ形になるとする一般相対性原理を満たすような理論を追及して，リーマン幾何学でのテンソルを用いたテンソル方程式としてアインシュタイン方程式を導いた．テンソルが一般座標変換によってもテンソルである性質を利用したものである．一般相対性理論についてのそれ以上の説明は他書に譲り[6]，GPS に話を進めよう．

5. GPS――グローバル・ポジショニング・システム

GPS は 4 機以上の GPS 衛星からの電波信号を受信して，受信者の 3 次元的な位置情報と受信に用いた時刻信号の GPS 時からのズレを知ることができるシステムである．視界が開けているところであれば，地球上のどこからでも常時 4 機以上の衛星が上空を通るように GPS 衛星が配置され，現在約 30 機が飛行している．GPS 衛星は上空約 2 万 km のほぼ円軌道上を約半日で周回しており，各衛星には原子時計が搭載され基地局との交信によって衛星の軌道や搭載時計の GPS 時に対する誤差などの情報が適宜更新されるようになっている．GPS で精密な位置決めが可能になるためには，衛星搭載を可能にする小型で高精度な原子時計や高精度な信号の遠隔伝送を可能にする電波通信技術と共に，これから説明するように相対性理論の正しい適用が不可欠なのである．

6. GPS による位置決定の原理

原理的な説明のために，まず慣性系の中での位置測定を考えよう．時刻 t_{A} に位置 $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ にある衛星から発せられた電波が位置 $(x_{\mathrm{R}}, y_{\mathrm{R}}, z_{\mathrm{R}})$ にある受信機で時刻 t_{R} に受信されたとすると，慣性系での光速度は一定値 c であるから，電波が伝わった距離 d_{RA} は $c(t_{\mathrm{R}}-t_{\mathrm{A}})$ となり，

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{RA}}^2 &= c^2\,(t_{\mathrm{R}}-t_{\mathrm{A}})^2 \\ &= (x_{\mathrm{R}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{R}}-y_{\mathrm{A}})^2+(z_{\mathrm{R}}-z_{\mathrm{A}})^2 \end{aligned} \tag{13}$$

の関係が成り立つ．ここで，受信された衛星からの信号には $t_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}}$ の情報が含まれていて，受信時刻 t_{R} が測定されるとすると，(13) 式は 3 つの未知数 $x_{\mathrm{R}}, y_{\mathrm{R}}, z_{\mathrm{R}}$ に関する一つの方程式になる．幾何学的には衛星の位置を原点して電波の伝わった距離を半径とする球面の方程式である．

同様な受信をほぼ同時に別の 2 つの衛星に対しても行えば，(13) 式と同様な関係式が 3 つ得られるため，

3 つの未知数を解くことができて受信機の位置を決めることができる．幾何学的には 3 つの球面の交点は 2 つあるが，もう一つの点（解）は地球から見て衛星軌道よりも外側にあるため容易に区別できる．

受信時刻は衛星と共通の時計ではなく，実際には受信側の時計で測るため，(13) 式の t_{R} は $T_{\mathrm{R}} - \Delta t$ で置き換えられ，受信側時計の誤差 $\Delta t(= T_{\mathrm{R}} - t_{\mathrm{R}})$ が未知数として加わる．そのため，実際上は 4 つの衛星からの受信によって得られる 4 本の関係式を解いて受信地の位置情報と時計の誤差が求まる．

7. 地球自転の影響

実際の受信機の位置は地球の自転に伴って慣性系に対して運動している．その効果を衛星から信号が発射された瞬間の慣性系に固定して考える．信号発射時刻 t_{A} での受信機の位置 $\vec{r}_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{A}}) = (x_{\mathrm{R}}, y_{\mathrm{R}}, z_{\mathrm{R}})$ に対して，実際に信号を受信した時刻 t_{R} での受信機の位置は

$$\vec{r}'_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{R}}) = \vec{r}_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{A}}) + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{A}})\,(t_{\mathrm{R}} - t_{\mathrm{A}}) \quad (14)$$

になる．ここで，$\vec{\Omega}$ は地球自転の角速度ベクトルで，$\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{A}})$ が地球自転による受信機の速度であり，信号が伝搬する時間（0.1 秒以下）の間は一定とみなせる．(13) 式は慣性系での方程式であるから厳密には（時刻を明示したベクトル表示で）

$$c^2 (t_{\mathrm{R}} - t_{\mathrm{A}})^2 = \left(\vec{r}'_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{R}}) - \vec{r}_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}})\right) \cdot \left(\vec{r}'_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{R}}) - \vec{r}_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}})\right) \quad (15)$$

となり，これに (14) 式を代入して (13) 式に対する 1 次の補正項までの近似で，

$$c(t_{\mathrm{R}} - t_{\mathrm{A}}) = |\vec{r}_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{A}}) - \vec{r}_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}})| + \frac{1}{c}\vec{\Omega} \cdot (\vec{r}_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}}) \times \vec{r}_{\mathrm{R}}(t_{\mathrm{A}})) \quad (16)$$

が得られる．

実際の位置決定には地球に固定した座標系で行うのが便利なので，GPS では自転する地球に付随した回転座標系が使われている．(16) 式の右辺がすべて時刻 t_{A} における量であることに注意すると，その瞬間にここまで論じてきた慣性系と合致する回転系の量に置き換えても結果は変わらない．なお，右辺第 2 項は幾何学的には衛星と受信機の位置ベクトルで作られる三角形を赤道面（自転角速度ベクトルに垂直）に投影した符号付の面積の 2 倍に比例した量である．この補正項は**サニャック**（Sagnac）**効果**と呼ばれ，光速度が有限であるために現れる効果であるが，慣性系での光速度不変を原理とする特殊相対性理論の回転系における見かけの効果とみなすこともできる．

表 1　GPS 衛星の同時受信による国際時刻比較の結果．UTC(I) は機関 I の時刻（協定世界時）．

時刻差の組合せ	時刻差（ナノ秒）	相対周波数差
UTC(PTB)–UTC(NBS)	−5383.8	-1.313×10^{-13}
UTC(TAO)–UTC(PTB)	+2598.0	$+0.658 \times 10^{-13}$
UTC(NBS)–UTC(TAO)	+2791.0	$+0.639 \times 10^{-13}$
総和	+5.2	-0.016×10^{-13}

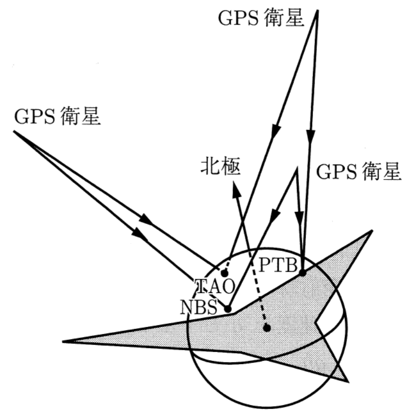


図 1　GPS 衛星同時受信での時刻比較におけるサニャック効果．影の面積がトータルな補正量に比例する．

GPS の受信に対して (16) 式の右辺第 2 項の補正値は最悪のケースで約 40 m にも達するため無視できない効果である．正しく補正された例として，国際間の精密時刻比較の結果を表 1 に示す[7]．同じ GPS 衛星からの信号を日米欧にまたがる各 2 国間で同時に受信して衛星の時計を仲介にした 2 機関の時刻比較が行われている．表 1 では米国標準局（NBS：現在は NIST），ドイツ物理工学研究所（PTB）と日本の東京天文台（TAO：現在は国立天文台）のそれぞれの間で GPS 同時受信によって求めた時刻比較の結果が示されている．それぞれの時刻差をサイクリックに足せば本来 0 になるべきであり，結果も誤差の範囲で 0 であった．もしサニャック効果の補正が行われなかったとすると，符号付きの面積の差をサイクリックに足し合わせることになるため，図 1 に示すような赤道面に投影された図形の面積に比例した量が残ることになる[8]．その量は利用した衛星の配置によるが，表 1 の場合には 230 ナノ秒から 350 ナノ秒の大きさであった．結果は測定誤差の範囲で 0 とみなせる 5.2 ナノ秒であったことは，この国際間の時刻比較では約 2% の不確かさでサニャック効果

の正しさを検証したことにもなる．

8. GPS における相対論的効果[9)]

位置決定の原理の説明では慣性系を用いたが，どの程度まで正しいかを考えてみよう．地球の重心は太陽を含む太陽系天体の重力を受けながら自由落下運動である公転軌道上の運動を行っている．そこで，前に述べたように地球重心に近い範囲は局所慣性系であると考えることができる．局所慣性系からのズレは太陽と月による潮汐効果が最も支配的であるが，GPS 衛星の軌道がある地球重心からおよそ地球半径の 4 倍離れた場所でさえ，その効果は 10^{-16} 程度であり，GPS では無視できる．一方，地球の重力による相対論的効果の大きさは，地球の重力ポテンシャルを $-\phi(r) = -GM/r$ で表すと $\phi(r)/c^2$ で評価でき，GPS 軌道上でその大きさはおよそ 10^{-10} である．そのような微小量であるので，質量 0 の質点が地球の重心と同じ軌道を動いているものとして，その質点の位置を原点とする局所慣性系を考える．先に述べたようにこの系は GPS を記述するには十分な広がりの範囲で慣性系と考えられるので，地球の質量による慣性系からのズレを微小量として解くことができるのである．そのようにして得られるアインシュタイン方程式の近似解は，

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\phi(r)}{c^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \quad (17)$$

である．特殊相対性理論での (5) 式と比較すると，時間成分と空間成分ともに地球の重力ポテンシャルによる影響が微小量として入っている．

(17) 式を用いて GPS 衛星に搭載された原子時計の固有時とこの系の座標時との関係を求めてみよう．固有時は衛星の軌道上で $ds^2 = -c^2d\tau^2$ であるので，

$$d\tau = \left(1 - \frac{\phi(r_{\mathrm{GPS}})}{c^2} - \frac{v_{\mathrm{GPS}}^2}{2c^2}\right)dt \quad (18)$$

が得られる．ここで，$v_{\mathrm{GPS}}^2 = (dx_{\mathrm{GPS}}^2 + dy_{\mathrm{GPS}}^2 + dz_{\mathrm{GPS}}^2)/dt^2$ で，(18) 式では微小量の 2 次以上を無視しているため，(17) 式の右辺第 2 項の空間成分にある重力ポテンシャルを含む（物理的には重力による空間の歪みの影響を表す）項の寄与は含まれない．

(18) 式は (7) 式と (12) 式に対応する効果，すなわち特殊相対性理論による運動する時計の遅れと等価原理により自由落下系を局所慣性系としたことによる重力赤方偏移の効果が合わさったものであることを示している．

(17) 式で $ds = 0$ とすることにより光の伝搬について考えてみよう．光の座標速度を単位時間座標値あたりの空間座標値の変化として定義すると，

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = c\sqrt{\frac{1 - 2\phi(r)/c^2}{1 + 2\phi(r)/c^2}} \approx c\left(1 - \frac{2\phi(r)}{c}\right) \quad (19)$$

となり，速度が場所によって異なることが分かる．重力ポテンシャルによって真空の屈折率が場所による変化を受けていると解釈することもできる．一般相対性理論の検証実験にも使われる光の経路の曲がりと光の伝搬時間の遅れは，どちらも真空屈折率の変化のためとして理解できる．

(18) 式とは違って，(19) 式には (17) 式の右辺の第 1 項と第 2 項の $\phi(r)$ が同じように寄与しており，等価原理を起源とする効果だけでなく空間のひずみ具合を決定するアインシュタイン方程式による効果も含まれている．

地心からの距離 r_{a} のある点で発せられた光が，地心からの距離 r_{b} で発射点からの距離が r_{ab} の地点まで伝搬するときの座標時間は，(19) 式を経路に沿って積分することにより，

$$t_{\mathrm{ab}} = \frac{r_{\mathrm{ab}}}{\mathrm{c}} + \frac{2GM}{c^3}\ln\left[\frac{r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{b}} + r_{\mathrm{ab}}}{r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{b}} - r_{\mathrm{ab}}}\right] \quad (20)$$

のように得られる．右辺第 2 項による伝搬時間の遅れは**シャピロ遅延**と呼ばれる．GPS 衛星からの信号を地表で受信する場合の遅延量は 0.04 ナノ秒から 0.06 ナノ秒程度であり，距離にして 1.2 cm から 1.8 cm であるので，カーナビでは無視できる効果である．

(17) 式の空間座標を地球自転とともに回転する空間座標に変換すると，

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\phi(r)}{c^2} - \frac{\Omega^2\left(X^2 + Y^2\right)}{c^2}\right)c^2dt^2 + \frac{2\Omega\left(XdY - YdX\right)}{c}cdt + \left(1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}\right)\left(dX^2 + dY^2 + dZ^2\right) \quad (21)$$

が得られる．この式から地球に固定された時計の固有時とこの座標系の座標時との関係が

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2\phi(r)}{c^2} - \frac{\Omega^2\left(X^2 + Y^2\right)}{c^2}}\,dt \quad (22)$$

で求まる．平方根の中の第 3 項は地球自転による遠心力ポテンシャルの効果である．これから分かるように，個々の原子時計がすべて理想的に固有時を刻むとしても座標時と比べたときの個々の時計の進み方は時計の

置かれた場所の重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの和の大きさによって異なる．

GPS 時や国際的な時刻を与える**国際原子時**（TAI）には，物事の基準となる標準としての役割が期待されるため，固有時と座標時の進み方の比率が一定になる基準の場所を決める必要がある．実際，TAI や GPS 時は**ジオイド**（Geoid）上に置かれた理想的な原子時計が示す固有時に近づけるように作られている．ジオイドとは地球の重力ポテンシャルと地球自転による遠心力ポテンシャルの合計が等しい等ポテンシャル面の一つで，平均海水面に近いものである．ジオイドポテンシャルの数値（理科年表などに出ている）を用いると，

$$d\tau\,(\text{on Geoid}) = \left(1 - 6.969290134 \times 10^{-10}\right) dt \tag{23}$$

である．

一方 (18) 式で表される GPS 衛星搭載の原子時計が示す固有時を軌道長半径 A，離心率 e の軌道に対して計算すると，座標時による不定積分から

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \left(1-\frac{3GM}{2Ac^2}\right)\Delta t-\frac{2e\sqrt{GM}}{c^2}\sqrt{A}\,\sin u+O\left(e^2\right)\\ &= \left(1 - 2.505 \times 10^{-10}\right)\Delta t\\ &\quad - 4.443 \times 10^{-10} e\sqrt{A}\,\sin u \ \ \text{(s)}\end{aligned} \tag{24}$$

が得られる．ここで u は衛星の離心近点離角である．また右辺第 1 項の A を 2.656×10^7 m とした．この式で右辺の第 1 項は固有時と座標時の刻み方の違いを表すが，(23) 式で与えられる GPS 時と座標時の刻み方を考慮すると，衛星上の固有時は GPS 時の刻み方に対して 4.464×10^{-10} の割合で早く進むことになる．衛星に搭載した原子時計が GPS 時に対して大きくずれると運用上も利用上も不便であるため，実際に衛星搭載用の原子時計は秒の定義に基づく本来の秒刻みに対して 4.45×10^{-10} の割合で遅れるように周波数オフセットされたものが使われている．一方，(24) 式の右辺第 2 項は軌道周期で変動する成分で，離心率が厳密に 0 にはできないために残る効果である．表 2 に実際の衛星ごとの変動の大きさの例を示した[10]．表 2 から分かるように衛星によっては約 30 ナノ秒の周期変動をする場合もあり，補正をしない場合には最大 10 m 近い位置の誤差を生じる可能性もある．

実際に衛星から電波信号として送られてくる情報には衛星軌道に関するものの他，電波の伝搬遅延のモデルについての情報や時刻情報があるが，時刻情報の中に個々の搭載時計の GPS 時に対する動きの推定モデルに関するものとともに，(24) 式の右辺第 2 項によって計算された相対論的時刻補正の情報も含まれている．

表 2　各 GPS 衛星の離心率と相対論的時計変動の振幅．

衛星番号	離心率（e）	変動の振幅（ナノ秒）
3	0.0124	28
6	0.0042	10
8	0.0047	10
9	0.0118	27
11	0.0111	25
12	0.0084	19
13	0.0040	9

9. おわりに

ここまで，GPS における相対論的効果について説明してきた．相対性理論（特殊も一般も）なしでは，GPS はカーナビとしては使い物にならない大きさの位置誤差を生むのである．ニュートン力学や電磁気学，量子力学と同じように，相対性理論も検証される理論から利用される理論へと成長しつつある．GPS のカーナビ利用の際に効いてくる相対性理論の効果は，現状の利用精度では，特殊相対性理論と等価原理から導き出される「重力赤方偏移」の効果に限られるものであるが，本特集で取り上げられる光格子時計などの超高精度の時計の利用やそのために必要な時計比較などにおいては，さらに高い精度での一般相対性理論の利用が必要となることは確実である．

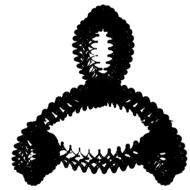
参考文献

1) ガリレオ・ガリレイ：『天文対話』（上）（下），青木靖三訳，岩波文庫，1959 年（上），1961 年（下）．
2) A. アインシュタイン：『相対性理論』，内山龍雄訳，岩波文庫，1988 年．
3) 藤本眞克，数理科学，No.**479** (2003), 15.
4) R.V. Pound and G.A. Rebka, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960), 337.
5) B.F. シュッツ：『相対論入門 II　一般相対論』江里口・二間瀬訳，丸善出版，2010 年（第二版）．
6) 教科書や参考書は多数出版されており，5) の他に例えば，三尾典克：『相対性理論』，SGC ライブラリ 56，サイエンス社，2007 年．
7) D.W. Allan *et al.*, *IEEE Trans.*, **IM-34-2** (1985), 118.
8) D.W. Allan *et al.*, *Science*, **228** (1985), 69.
9) 藤本眞克，計測と制御，**27** (1988), 609.
10) 山崎・木下・藤本，東京天文台報，**20-4** (1986), 572.

（ふじもと・まさかつ，国立天文台名誉教授）

光格子時計

新しい時間標準



香取 秀俊

1. はじめに

物差しで何かを測定しようとするとき，我々は物差しの精度に全幅の信頼を寄せている．物差しの精度を疑ってかからなくてはいけないような事態は日常生活ではまずない．大抵の実験でも，実験自体の不確かさが最初のハードルだ．ただ最近，気になって仕方がないのが，車のメーターパネルの時計とその横のカーナビ画面の時刻表示だ．過酷な温度環境下で車載の水晶さんは実によく頑張っていると，私は思う．しかし，実験的想像力を欠く家内に，水晶さんの苦労は分かるまい．「1 カ月前に合わせたばかりなのに 1 分もずれている」と容赦ない．

カーナビの時計は GPS（Global Positioning System）衛星に搭載された**原子時計**で常に校正されている非常に正確な物差しである．一方，車載の時計は，水晶の固有振動が頼りなので分が悪い．水晶時計は GPS のカーナビ時計に圧倒的に評価される立場で $\Delta t/t = 1$ 分 $/(1$ カ月$) \approx 2\times10^{-5}$ の不確かさをもつと判定される．学生が実験を考案して 5 桁の有効数字で物理量を測ってきたら，教師はその才能を大いに褒めて，研究者への道を諭すのがよい．水晶さんの言われようと何と違うことか．

車の運転をしながら，ちょっと横目で見ただけで 5 桁の精度の測定ができるのは驚異的だ．これがまさに，《精密計測の鉄則は，計測を時間や周波数の計測に置き換えること》と言われる所以だ．時間や周波数測定では，振動を数える《カウンター》さえ用意すれば事足りる．周期 $T = 1\,\mathrm{s}$ のパルスを 1 カ月分も数えれば，$n = 2{,}592{,}000$ カウントにも達するので，60 カウント間違っても有効数字は 5 桁も出る．

もっと精度の高い計測を志すと，水晶に対して圧倒的優位を誇った GPS カーナビの時計も 11〜12 桁くらいで怪しくなる．各国の標準研究所にお伺いを立てると，**国際原子時**と呼ばれる各国の原子時計の加重平均で取り決められる時系に案内され，15 桁の精度で 1 秒が手に入る．これが現行の**国際単位系（SI）**の 1 秒の精度の限界である．どんなに頑張って時間や周波数計測をしても，15 桁以上の数字を使って，その実験結果を表記できないのが今の科学の現状だ．なぜ 15 桁もの数字が気になるようになったのだろう？ その桁数の先にどんなサイエンスが待っているのだろう？

2. 量子計測と光時計

時計の不確かさ $\Delta t/t$ は，時を刻む振動周期 T の相対的な不確かさ $\Delta T/T$ と等価である．これは振動周波数 $\nu = 1/T$ を使って表せば $\Delta\nu/\nu$ である．**物理定数**が不変（普遍）なら，原子の 2 状態間の**遷移周波数** $\nu_0 = (E_b - E_a)/h$ も不変（普遍）なはずだ．かくして，高精度な原子時計を作ることは，高精度な原子分光実験に帰着する．原子時計を作る実験的努力の 99% は「遷移周波数 ν_0 をできる限り忠実にレーザーや水晶などのマクロな発振器にコピーすること」に注がれる（図 1）．$\Delta\nu$ はこのコピーの不確かさを表す．

さて，原子分光の**周波数不確かさ** $\Delta\nu$ の原因を考えよう．原子の遷移を観測する時間を T_{int} とすれば，得られるスペクトルの線幅は，フーリェ変換の関係から $\gamma = 1/T_{\mathrm{int}}$ である．まずは，原子とプローブのコヒーレントな**相互作用時間** T_{int} をできる限り長くとることが大事である．ここが実験の工夫のしどころで，この話の骨子である．他の原子が衝突して観測原子の双極子の位相緩和が起きたり，プローブの発振器の位相が揺らいだりするので，最先端の実験技術を駆使しても，この相互作用時間 T_{int} は数秒がせいぜいだ．

では，$\gamma \sim 1\,\mathrm{Hz}$ から出発しよう．いかに細かくそのスペクトルの中心を読むかが次の関心事である．次節で述べる**量子射影雑音**（Quantum Projection Noise）の議論から，例えば，$N = 10^6$ 個の原子を観測すれ

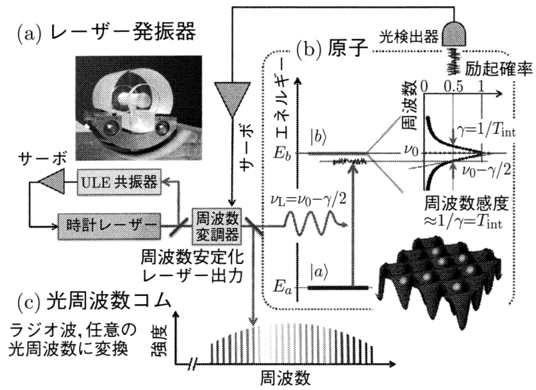


図 1　（光）原子時計は，発振器（レーザー）・原子・分周器（光周波数コム）から構成される．ULE（超低熱膨張）ガラスで作る光共振器に周波数安定化したレーザー光 (a) をプローブとして，原子の遷移を励起する (b)．この励起確率を参照しレーザー光の周波数 $\nu_{\rm L}$ を制御する．こうして，原子のミクロな振動 ν_0 をマクロなレーザーの振動にコピーする．このレーザー光を，光周波数コム (c) によって，任意のラジオ波・光周波数に分周する．

ば，$\Delta\nu_{\rm QPN}=\gamma/\sqrt{N}\sim 1\,{\rm mHz}$ が得られる．原子時計の研究が，《**量子計測**》と呼ばれる所以は，このような量子力学的な限界だけで計測を極めるからに他ならない．この計測が意味をもつには，原子分光の不確かさ，例えばドップラー・シフトや電磁場の摂動を $\Delta\nu_{\rm pert}<1\,{\rm mHz}$ にしなくてはいけない．ここで様々なトリックが考案され，面白い物理が見えてくる．

ところで，なぜ光を使う必要があるのだろう？ 量子射影雑音 $\Delta\nu_{\rm QPN}$ や原子遷移への摂動 $\Delta\nu_{\rm pert}$ など，大抵の周波数の不確かさ $\Delta\nu$ は，遷移周波数 ν_0 に関係ない［この例外が速度 u の原子に対して $\Delta\nu_{\rm D}=(u/c)\nu_0$ となるドップラー効果だ（c は光速）．この対処法は次節で述べる］．この結果，高い遷移周波数 ν_0 を使うほうが，原子時計の高性能化 $\Delta t/t=\Delta\nu/\nu$ に有効というわけだ．

現在の SI 秒を決める**セシウム原子時計**[1]（遷移周波数 $\nu_0\approx 9.2\,{\rm GHz}$）が発明された 1955 年当時は，戦時中のマイクロ波レーダーで培われたマイクロ波技術が高周波の最前線だった．超高安定なレーザーが実現し，光周波数コムによるレーザーの周波数計測技術が確立すると[2,3]，時計研究の表舞台はマイクロ波から，$\nu_0\approx 400\,{\rm THz}$ から $1\,{\rm PHz}$ に至る光周波数に移っていく．分子の不確かさ $\Delta\nu$ が同じでも，分母の ν が 4～5 桁大きくなれば，時計の精度もその分向上する．この結果，時計精度の革命的な向上が起きている途上がこの 10 年だ．

3. 単一イオン光時計：光時計の元祖

1953 年にウォルフガング・パウルは，四重極の振動電場を使って荷電粒子（イオン）を捕獲する**ポール・トラップ**[4] を考案した．荷電粒子に対して，四重極電場は鞍型のポテンシャルになって，ある方向には粒子を閉じ込めるが，別の方向には粒子が逃げてしまう．このため，四重極電場の向きを周期的に切り替える《動的安定化》の手法を使って，その中心の電場のゼロ点に粒子を捕獲する．これは，イオンに触れず（電磁場の摂動を与えず）にイオンを捕まえる手品師顔負けの芸当だった．これに目をつけたデーメルトは，ポール・トラップの原点に束縛されたイオンの分光で 18 桁の時計が作れるだろうと議論し，$\Delta\nu/\nu=10^{-18}$ のゴールを設定した[5]．

ポール・トラップのもう一つ大事な役割は，強力なイオンの閉じ込めだ．角周波数 Ω で $x=x_a\sin\Omega t$ と調和的に閉じ込められたイオンが見る（光）電場は，その波数 $k(=2\pi/\lambda)$ がイオンの運動と同軸上なら，

$$E=E_0\cos(kx_a\sin\Omega t-\omega t) \tag{1}$$

となる．これは，変調指数 $m=kx_a$ の位相変調スペクトルである．イオンの運動振幅 x_a が波長 $\lambda=2\pi/k_a$ に比べて十分小さいときには，$m=2\pi x_a/\lambda\ll 1$ となるので，(1) 式は

$$E\approx E_0\left[\cos\omega t+kx_a\frac{\cos(\omega-\Omega)t-\cos(\omega+\Omega)t}{2}\right] \tag{2}$$

と展開できる．イオンの運動に伴うドップラー効果は，閉じ込め周波数 Ω で量子化され，さらに，$x_a\ll\lambda$ の条件を課すことで，右辺の第 2 項の運動サイドバンドの振幅はゼロに漸近する．この相互作用する電磁波の波長に比べて原子が十分に局在する条件を**ラム・ディッケの束縛**[6] という．

《電磁場の摂動を加えることなく，イオンを波長以下の領域に捕獲する》ポール・トラップを使った光時計は，文句の付けようのない理想の時計だ．パウルとデーメルトは 1989 年のノーベル賞を，17 桁を超える時間計測を実現して，デーメルトの夢を叶えたワインランドは 2012 年のノーベル賞に輝いた．この半世紀の既定路線をいかに超えるかが，我々の腕の見せ所だ．

1 個の原子から取り出せる情報は量子力学的な制約

を受ける．周波数計測のスペクトル幅 $\gamma = 1/T_{\rm int}$ はフーリェ限界で決まった．原子の遷移周波数 ν_0 をレーザー周波数 $\nu_{\rm L}$ に忠実にコピーするには，図 1 (b) のように，レーザー周波数 $\nu_{\rm L}$ に対して原子の励起確率 κ が最も急峻に変化する $\kappa = 1/2$ 近傍のスロープを使えば，$\nu_{\rm L}$ の変化を最大感度（$d\kappa/d\nu_{\rm L} \approx 1/\gamma$）で読み出せる．この信号 κ を使ってレーザー周波数を原子の遷移周波数に安定化するようにサーボをかける．こうして，原子のミクロな振動をマクロな発振器にコピーする．

無相関な N 個の原子の励起確率 κ は，二項分布の分散から計算される量子揺らぎをもち，これが量子射影雑音 $\delta\kappa_{\rm QPN}$ の起源となる[7]．励起確率が $\kappa \approx 1/2$ のとき，周波数感度が最大な一方で，量子射影雑音 $\delta\kappa_{\rm QPN} \approx 1/\sqrt{N}$ も最大となり，周波数安定化の量子限界 $\delta\nu_{\rm QPN} \approx \gamma\delta\kappa_{\rm QPN} \approx \gamma/\sqrt{N}$ を決める．精度を上げるには，毎秒 n 個の原子の測定を τ 秒間繰り返し，のべ $N = n\tau$ 個の原子を観測する．この結果，原子時計の量子限界の安定度は

$$\frac{\delta\nu_{\rm QPN}}{\nu_0} \approx \frac{\gamma}{\nu_0\sqrt{n\tau}} \qquad (3)$$

に向上する．

デーメルトの単一イオン光時計では (3) 式で，$n = 1\,{\rm s}^{-1}$，$\gamma = 1\,{\rm Hz}$，$\nu_0 = 10^{15}\,{\rm Hz}$ を代入して $\tau = 10^6\,{\rm s}$（およそ 10 日）で 18 桁のゴールに到達する．単一イオンの 100 万回の繰り返し測定に要する 10 日の平均時間は，時計に期待する時間スケールとしては随分長い．18 桁の時間を実時間で読み出せる時計はできないだろうか？ 1 度に 100 万個の原子を観測する時計を作れば，1 秒の測定で 18 桁の安定度に到達する計算だ．

4. 中性原子でイオン時計を真似る：光格子時計の発明

中性原子間のファンデルワールス力はイオン間のクーロン斥力に比べれば桁違いに短距離力なので，原子間相互作用が無視できるくらいの原子間隔を保ちながら，100 万個を同時に観測するのも無理ではない．問題は，いかにしてその時計遷移に気付かれないように，中性原子をラム・ディッケの領域に閉じ込めるかだ．

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 中で原子は分極し［図 2 (a)］，**誘起双極子** $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}$ を生じる．この双極子が電場と相互作用することで**シュタルクエネルギー** $U = -\int \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}\alpha|\boldsymbol{E}|^2$ を生じる．振動電場中では分極率も周波数 ω に依存し**動的分極率** $\alpha(\omega)$ となる．例えば，原子

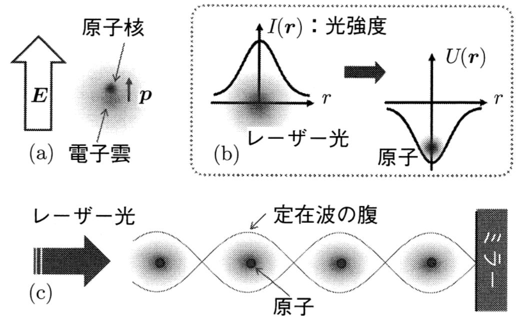


図 2 レーザー光による原子のトラップ．(a) 電場をかけると原子は分極し双極子が誘起される．(b) この誘起双極子は電場中でシュタルクエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ を生じる．分極率 $\alpha > 0$ なら原子はレーザー強度の極大点にトラップされる．(c) 定在波中で原子は腹の位置にトラップされる．

の共鳴周波数 ω_0 よりゆっくり振動（$\omega < \omega_0$）する電場をかけると，原子の双極子は同相で振動するので $\alpha(\omega) > 0$ となる．この結果，空間的に不均一なレーザー電場 $\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{r})$ 中では，シュタルクエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ は（光）電場強度 $|\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{r})|^2$ の極大点で極小になり，その位置に原子がトラップされる［図 2 (b)］．このような原子の**光双極子トラップ**はアーシュキンらにより議論され，レーザー冷却で極低温原子が得られるや，1986 年には最初の双極子トラップ実験が行われた[8]．

図 2 (c) のように，レーザー光をミラーで折り返して定在波を作ると，原子は腹の位置にトラップされ，半波長間隔で原子が配列する**光格子**が実現する．この定在波を 3 次元的に組み合わせると，図 3 (a) の卵パック状の原子の小部屋が作られ，原子はその格子点にトラップされる．$1\,{\rm mm}^3$ 程度の光格子を用意すれば，波長間隔で並ぶ原子の小部屋は 10^9 個もできる．スカスカに詰め込んでも，100 万個の原子は確保できるだろう．このような光格子中の原子はトラップ光の波長の 1/10 程度の領域に閉じ込められる．この結果，イオントラップの場合と同様，ラム・ディッケ束縛の条件が満たされ，ドップラー・シフトが消失する．

原子を捕まえて，波長以下の領域に閉じ込めたはいいが，このおかげで，時計に使う原子の固有状態 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ のエネルギーが，シュタルク効果により $E_{b'} = E_b - \frac{1}{2}\alpha_b(\omega, \boldsymbol{\epsilon})|\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{r})|^2$，$E_{a'} = E_a - \frac{1}{2}\alpha_a(\omega, \boldsymbol{\epsilon})|\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{r})|^2$ と変化してしまった．ここで $\alpha_a(\omega, \boldsymbol{\epsilon}), \alpha_b(\omega, \boldsymbol{\epsilon})$ はレーザーの周波数 ω と偏光 $\boldsymbol{\epsilon}$ に依存する $|a\rangle, |b\rangle$ 状態の動的分極率である．この結果，光格子中での 2 状態のエネルギー差 $h\nu = E_{b'} - E_{a'}$ は，電

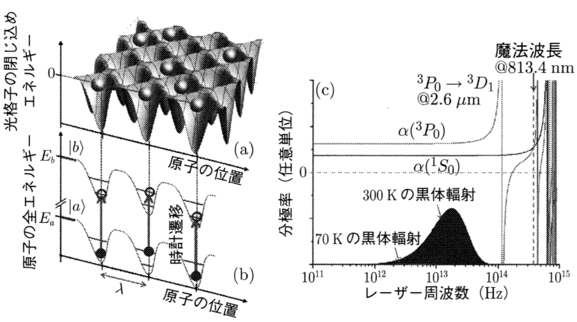


図 3 光格子時計の概念図．(a) 3 次元的な光の干渉縞を作り，それぞれの電場の腹に原子（球体で示した）を 1 個ずつトラップする．(b) 特定の周波数のレーザーで光格子を構成すると，シュタルク効果が上下準位で相殺し，遷移周波数が変化しない．この周波数を魔法周波数と名付けた．(c) ストロンチウム原子の $^1S_0$ と $^3P_0$ 状態の分極率．魔法周波数以外の電場成分，例えば，300 K の黒体輻射が原子に当たると，時計遷移はシュタルクシフト—黒体輻射シフト—を生じる．

場の 4 次以上のシュタルク効果の寄与 $O(|\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{r})|^4)$ まで考慮すると，

$$h\nu = h\nu_0 - \frac{1}{2}(\alpha_b(\omega,\boldsymbol{\epsilon}) - \alpha_a(\omega,\boldsymbol{\epsilon}))|\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{r})|^2 + O(|\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{r})|^4) \quad (4)$$

と変化する．原子時計で測りたい量は，2 つの固有状態の間のエネルギー差 $h\nu_0 = E_b - E_a$ なので，原子を捕まえた光格子のシュタルクエネルギー $\propto |\boldsymbol{E}(\omega,\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{r})|^2$ が邪魔だ．この寄与を取り除くには，その係数 $\Delta\alpha(\omega,\boldsymbol{\epsilon}) = \alpha_b(\omega,\boldsymbol{\epsilon}) - \alpha_a(\omega,\boldsymbol{\epsilon})$ をゼロにすればいい[9]．さらに，全軌道角運動量が $J = 0$ となる電子状態を使えば，分極率はレーザーの偏光状態 $\boldsymbol{\epsilon}$ に依存しなくなるので，光格子レーザーの周波数 $\omega_{\rm m}$ を $\Delta\alpha(\omega_{\rm m}) = 0$ と合わせるだけで，(4) 式で電場の 2 次までシュタルク効果を排除できる[10]．

ストロンチウム原子の場合には，周波数 $\omega_{\rm m} \approx$ 368.55 THz のレーザー光で光格子を作ると，時計遷移の $^1S_0$ 基底状態と $^3P_0$ 励起状態の分極率がちょうど等しくなる［図 3 (c)］．この $\omega_{\rm m}$ を**魔法周波数**と名付けた．電場の 4 次以上の摂動は依然として残るが，18 桁の時計精度を狙う分にはこの寄与は十分に小さい[11]．この方法を使うと，たった 9 桁の精度で光格子レーザーの周波数 $\omega_{\rm m}$ を合わせるだけで，18 桁目の数字まで $h\nu \approx h\nu_0$ が担保される．9 桁の周波数合わせは，少し高級な水晶発振器や，カーナビの GPS の信号を参照すれば，難なく実現できる．魔法周波数は，容易に入手可能な時間資源を使って，より精度の高い時間資源を生成する魔法のプロトコルとして機能する．この思考の背景には，精密計測屋さんの《周波数原理主義》がある．余計なプロトコルが必要になっても，それが精密に定義可能な周波数で記述される限り文句はないのだ．

5. 18 桁の時間計測を一気に加速した光格子時計

2004 年，東大グループは産業技術総合研究所がもつ国際原子時にリンクしたセシウム原子時計と光格子時計の時間比較を行った[12]．欧米の標準研究所も競って光格子時計の開発を始め，2005 年末から 2006 年にかけては，アメリカ，フランスのグループが相次いで光格子時計の追試実験を発表した．この日・米・仏の実験結果の良好な一致を受けて，2006 年 10 月の国際度量衡委員会（CIPM，Comité International des Poids et Mesures）では，光格子時計の手法によって実現された中性ストロンチウム原子の光遷移を含む 5 種の原子遷移を《**秒の二次表現**》—セシウム原子時計を上回る性能を実現する可能性をもつ原子時計候補—として採択した．

さらに 2011 年の CIPM では，ストロンチウム原子の遷移周波数として 429,228,004,229,873.4 Hz を勧告し，国際原子時と等価な 1×10^{-15} の不確かさを付与した．現在，光格子時計は，世界中 20 近くの研究機関で研究が進み，特にストロンチウム原子・光格子時計では，日本の 2 機関を含む，世界の 5 つの研究機関で周波数が計測された（図 4）．注目すべきは，これらの測定の不確かさが，参照するセシウム原子時計の不確かさで決まっていることだ．セシウム原子時計を超える性能をもつ光格子時計は，現行の SI 秒の不確かさを評価する**スパクロ**（スーパークロック）としての機能を発揮し始めた．

18 桁の精度実現を阻む最後の難関は，室温実験環境の約 0.1℃ の温度変化に伴う**黒体輻射シフト**になっ

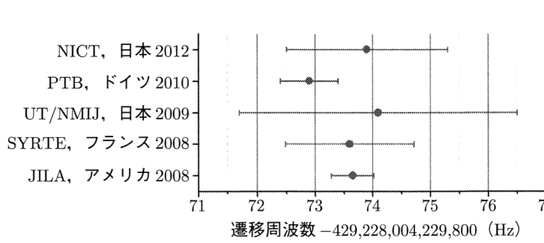


図 4 ^{87}Sr 原子を用いた光格子時計の絶対周波数計測．

た．温度 T の壁と熱平衡な電磁場のスペクトルは，**プランクの輻射則** $u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_B T}-1}$ で与えられ，その平均電場は，シュテファン–ボルツマン則 $\langle E\rangle^2 = \int_0^\infty u(\nu)d\nu = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3\epsilon_0 h^3}T^4 = c_1 T^4$ で与えられる．$T = 300\,\mathrm{K}$ の**黒体輻射スペクトル**は $10\,\mu\mathrm{m}$ にピークをもつ図 3(c) の塗りつぶした領域に相当し，その平均電場は $\sqrt{\langle E\rangle^2} = 8.3\,\mathrm{V/cm}$ である．原子はこの黒体輻射の僅かな電場によってシュタルクシフトし時計の不確かさ要因になる．この黒体輻射のエネルギーは T^4 の依存性をもつので，原子を囲む壁の温度を $T = 70\,\mathrm{K}$ にするだけで，黒体シフトは激減する[11]．

黒体輻射が寄与する長波長スペクトルの領域では，黒体輻射シフトの計算は静的分極率 $\alpha(0)$ で大部分取り扱え，

$$\delta\nu_{\mathrm{BBR}} \approx -\frac{1}{2h}(\alpha_P(0) - \alpha_S(0))\langle E\rangle^2$$
$$= -\frac{1}{2h}\Delta\alpha(0)c_1 T^4$$

となる．一般に，$^1S_0$ 基底状態に比べて $^3P_0$ 励起状態のほうがその上の励起状態への双極子結合が大きいため分極率差は $\Delta\alpha(0) = \alpha_P(0) - \alpha_S(0) > 0$ となる．静的分極率は，双極子遷移の共鳴周波数 ω_0 に対して ω_0^{-1} の依存性をもつので，最低励起状態への遷移周波数が高い原子ほど小さい．つまり，いい時計を作る戦略は，紫外域の遷移をもつ Hg や Cd 原子を用いて紫外レーザーを作る実験的困難をとるか，可視レーザーで扱える Sr や Yb 原子を用いて，分光環境を低温に保つ実験的困難をとるかの選択になる．欧米グループで Sr や Yb 原子の $\Delta\alpha(0)$ の測定が行われる一方，理研では分光用に $T = 70\,\mathrm{K}$ の温度環境を用意する低温動作・光格子時計が完成し比較実験が始まった（図 5）．18 桁の光格子時計の実現にいよいよリーチがかかった．

6. 新しい時間へ

現行の SI 秒を上回る性能をもつ原子時計を世界のグループと共有する次のステップは，2 種の光時計の周波数比の測定だ．例えば，ストロンチウム原子と水銀原子の周波数比 $\nu_{\mathrm{Hg}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ の測定なら，現行の SI 秒を介さずに，光時計の限界まで有効数字を増やせる．このような周波数比測定が世界中で行われ，それらの一致が確認されることで，現行の SI 秒の不都合が実証され，解消されていくだろう．この比の分母にくる時計周波数が事実上の次世代の秒の定義を与えることになる．

高精度な時計開発では，各地の研究所で開発する原

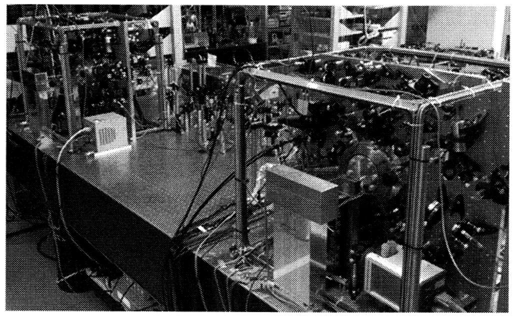


図 5 理化学研究所での 2 台のストロンチウム原子・光格子時計の比較実験．小型のスターリング冷凍機（手前の横長の直方体の箱がコンプレッサーを囲む磁気シールド）により，70 K の低温環境下での光格子分光を実現する．

子時計の遠隔比較の積み重ねが欠かせない．衛星を使う従来の周波数伝送では 1×10^{-15} の比較でさえ 1 日の平均時間が必要で[13]，高安定な光時計のメリットを生かせない．**光ファイバ周波数リンク**はこれを解決する次世代の高精度周波数伝送インフラである．特にヨーロッパ圏での関心は高く，ドイツのミュンヘン–ブラウンシュバイクの 900 km を繋ぐファイバリンクが完成した[14]．さらにパリまで延伸し，ヨーロッパ一円でのファイバリンクが構想されている．やがて光時計はこれらのファイバ網で相互につながり，新時代の超高精度・時間インフラを形成するだろう．2011 年に東京圏で行われた，東大–NICT の光格子時計のリンク実験はそのさきがけだ[15]．さらに，東大–理研（和光）間では 1 秒で 10^{-17} の安定度をもつ光ファイバリンクが整備され，18 桁の周波数リンクを目指した光格子時計の遠隔比較実験が進行中だ．

一般相対論によれば，地上で $\Delta h = 1\,\mathrm{m}$ 上方に置かれた時計は $\Delta\nu/\nu_0 = g\Delta h/c^2 \approx 1 \times 10^{-16}$ だけ早く進む（g は重力加速度）．この**重力シフト**を補正して世界共通の時系を作るために，重力ポテンシャルの基準面—**ジオイド面**—が決められている．日本では，東京湾の平均海水面がこれにあたる．時間の一次標準に用いられる世界中のセシウム原子時計は，通信衛星や GPS 衛星を介して相互につながり，1×10^{-15} を切る不確かさの時系・国際原子時（TAI）を形成し，1 秒の拠り所となっている．月や太陽の潮汐効果は 10^{-17} 台で重力シフトの変動をもたらすものの，TAI の共有では問題にはならない．つまり，地球は堅牢な時間の基準として機能してきた．

光格子時計が実現する 18 桁の時間合わせでは，日

常の運動スケールで相対論的効果が介入する．しかも，これらが数秒で見えてくると，他者と同じ時を共有することの難しさを認識せざるを得なくなる．アインシュタインの相対性理論に霊感を受けて描いたとされるサルバドール・ダリの「記憶の固執」に登場する「やわらかい時計」を髣髴とさせる世界観が現実となる．もはや原子時計は時間合わせの道具ではなく，曲がった時空を照らし出すプローブになる．重力シフトを高精度に検出することは，地底に眠る資源の探索や地殻変動を観測する，**相対論的測地学**ともいうべき新たな分野を切り拓くツールとなる．

物理学と原子時計の基礎は，《物理定数は定数》という仮定のもとに成り立ってきた．例えば，電荷素量 e，プランク定数 $\hbar$，光速 c からなる無次元量，**微細構造定数** $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ は，原子スペクトルをスケールする基本的な定数である．これが一定なら，どの原子種で時計を作っても同じ時を刻み続ける．異種の高精度原子時計の精密比較，たとえば $\nu_{\mathrm{Hg}}/\nu_{\mathrm{Sr}}$ の評価は，物理定数の恒常性に関する実験的知見を与える可能性を秘めている[16]．一方，楕円の公転軌道により太陽からの重力ポテンシャルが 1 年を通して変化する地球上で，異種の原子時計の進み方が異なれば，微細構造定数 α と重力との結合を示唆するだろう．このような実験的挑戦[17] は，新たな物理の枠組みを探索する有効なプローブになるだろう．

7. むすび

誕生以来 10 年で 1 桁のペースで精度向上を遂げてきた原子時計は，今世紀に入ってわずか 10 年で 2 桁近い革命的な精度向上を果たした．この機に足並みを揃え，本邦でガラパゴス的進化を遂げた光格子時計[18] は，超高安定度・光時計の新たな潮流となった．ほどなく 18 桁の周波数比較が実現されて，我々は未体験の時間資源を手に入れるだろう．量子力学はデバイス応用を通していち早く現代生活に持ち込まれたが，この新たな時間資源は，相対論的世界観を日常に持ち込むことになる．

東京圏で 18 桁精度の光格子時計のファイバネットワークが稼働すれば，高度差 1 cm に対応する重力ポテンシャルの変動が時空間の歪みとしてマッピングされる．これは従来の GPS を使った測位，加速度センサーを使った重力加速度測定に加えて，新たな地殻変動のプローブになるだろう．これは目的ではなくて，GPS のカーナビ利用のように，堅牢なタイムベースのもたらす副産物に過ぎない．我々は未体験の時間資源を目の前にして，原子時計が発明された半世紀前に GPS のカーナビ応用を考えるに等しい想像力を要求されている．

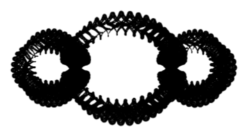
参考文献

1) L. Essen and J.V.L. Parry, *Nature* **176**, 280 (1955).
2) T.W. Hnsch, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1297 (2006).
3) J.L. Hall, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1279 (2006).
4) W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990).
5) H.G. Dehmelt, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-31**, 83 (1982).
6) R.H. Dicke, *Phys. Rev.* **89**, 472 (1953).
7) W.M. Itano, J.C. Bergquist, J.J. Bollinger, J.M. Gilligan, D.J. Heinzen, F.L. Moore, M.G. Raizen, and D.J. Wineland, *Phys. Rev. A* **47**, 3554 (1993).
8) S. Chu, J. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314 (1986).
9) H. Katori, T. Ido, and M. Kuwata-Gonokami, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 2479 (1999).
10) H. Katori, in *The 6th Symposium on Frequency Standards and Metrology*, edited by P. Gill (World Scientific, 2002), p.323.
11) H. Katori, M. Takamoto, V.G. Pal'chikov, and V.D. Ovsiannikov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 173005 (2003).
12) M. Takamoto, F.L. Hong, R. Higashi, and H. Katori, *Nature* **435**, 321 (2005).
13) A. Bauch, J. Achkar, S. Bize, D. Calonico, R. Dach, R. Hlavac, L. Lorini, T. Parker, G. Petit, D. Piester, K. Szymaniec, and P. Uhrich, *Metrologia* **43**, 109 (2006).
14) K. Predehl, G. Grosche, S.M.F. Raupach, S. Droste, O. Terra, J. Alnis, T. Legero, T.W. Hnsch, T. Udem, R. Holzwarth, and H. Schnatz, *Science* **336**, 441 (2012).
15) A. Yamaguchi, M. Fujieda, M. Kumagai, H. Hachisu, S. Nagano, Y. Li, T. Ido, T. Takano, M. Takamoto, and H. Katori, *Appl. Phys. Exp.* **4**, 082203 (2011).
16) J.-P. Uzan, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 403 (2003).
17) S. Blatt, A.D. Ludlow, G.K. Campbell, J.W. Thomsen, T. Zelevinsky, M.M. Boyd, J. Ye, X. Baillard, M. Fouche, R.L. Targat, A. Brusch, P. Lemonde, M. Takamoto, F.L. Hong, H. Katori, and V.V. Flambaum, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 140801 (2008).
18) H. Katori, *Nature Photon.* **5**, 203 (2011).

（かとり・ひでとし，東京大学大学院工学系研究科，科学技術振興機構 ERATO 創造時空間プロジェクト，理化学研究所）

量子もつれ

量子暗号への道



都倉 康弘

本稿を執筆している2013年は，デンマークの物理学者Niels Bohr（1885–1962）がすべての物質を構成する「原子」の従う原理に関する三部作の論文を発表してから百年となる．「前期量子論」と呼ばれるこの成果*1)は，その後の多くの研究者ら（Werner Heisenberg（1901–1976），Erwin Shrödinger（1887–1961），Wolfgang Pauli（1900–1958），Paul Dirac（1902–1984），...）の努力により**量子力学**として1930年頃に完成する．今日我々が享受している技術革新の多くはこの量子力学を基礎としている．例えば，コンピュータの構成要素である半導体集積回路や磁気記憶媒体，半導体レーザーや核磁気共鳴画像撮影（MRI）に用いられる超伝導磁石などがある．このパラダイムでは，光や電子さらには原子でも，波と粒子の性質を合わせ持つという常識では理解できない点があるが，ナノスケール（$\mathrm{nm}=10^{-9}\,\mathrm{m}$）の実験結果を驚く程の正確さで説明することができ，その「正しさ」を疑うものはほんの僅かであろう．

本稿で紹介するのは，量子力学の誕生後50年ほどして起こった「第二の革命」とも呼ぶことのできる研究の流れと，それから生まれた学際的分野である量子情報科学，特に**量子暗号**についてである．

1. 二人のBell氏

スコットランド出身のAlexander Graham Bell（1847–1922）は，世界初の実用的電話の発明で名高い．彼にちなんでデシベルという音響や電力の無次元の単位を考案したのはベル研究所であり，ここから，先に述べた量子力学を応用した技術（トランジスター，レーザー）が生み出され，1940年代後半にこの研究所で生まれたClaude Shannon（1916–2001）の情報理論と共に現代の情報社会の一端を支えている．

一方北アイルランド出身のJohn Stewart Bell（1928–1990）は量子力学の「第二の革命」のきっかけとなった「Bellの不等式」に関する論文を1964年に発表した[1]．これは，Einstein–Podolsky–Rosenの3名が提示した疑問「量子力学は物理現象を完全に描き得るか」（EPRパラドックスとも呼ばれる）に最終的に答える鍵を与えることになる．

1.1 重ね合わせと測定の期待値

量子力学ではHilbert空間と呼ばれる複素ベクトル空間を考え，その要素である状態ベクトルが物理的状態を表す．その状態を調べるために行う「測定」の結果は測定を表す演算子の期待値で示される確率に従う．具体的な説明のために，最も簡単な離散量子系であるスピン1/2系を考える．2次元Hilbert空間で定義される状態ベクトルは，$|\uparrow\rangle$，$|\downarrow\rangle$を規格直交基底とする．これらはPauli行列の一つ$\hat{\sigma}_z$の固有状態で，それぞれ固有値$+1$，-1を持つ．任意の物理的状態はこれらの**重ね合わせ**で表現され，2つの複素数α，βを用いて

$$|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle, \qquad (1)$$

*1) Max Planck（1858–1947）のエネルギー量子仮説やAlbert Einstein（1879–1955）の光電子仮説に引き続く仕事．

と書ける（規格化条件より $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$）．例えば $\alpha=1/\sqrt{2}, \beta=\pm 1/\sqrt{2}$ と選んだ状態を

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \tag{2}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \tag{3}$$

と定義する．これらは別の Pauli 行列 $\hat{\sigma}_x$ の固有状態で，それぞれ固有値 $+1$, -1 を持つ．状態ベクトルで表される状態は**純粋状態**と呼ばれるが，もっと一般に我々が知り得ることのできない情報に依存した状態は密度行列 $\hat{\rho}$ で表現される．状態が $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle$ のうちのどれか（$n \geq 1$）であり，その確率がそれぞれ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ であるとき，密度行列は次で定義される：

$$\hat{\rho} \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j|. \tag{4}$$

ただし $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ を満たす．純粋状態 $|\psi\rangle$ に対応する密度行列は $\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ で定義され，$(\hat{\rho})^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho}$ である．密度行列は $\mathrm{Tr}\ \hat{\rho} = 1$ の性質を持つ．ここで Tr は行列の跡（**トレース**）を表し，スピン 1/2 の例では任意の演算子を $\hat{\mathcal{O}}$ として $\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{O}}) \equiv \langle\uparrow|\hat{\mathcal{O}}|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\hat{\mathcal{O}}|\downarrow\rangle$ となる．純粋状態でない状態を**混合状態**と呼び，その密度行列は $\mathrm{Tr}\ (\hat{\rho})^2 < 1$ の性質を持つ．

さてスピンの z 方向の大きさの測定を考える．射影演算子 $\hat{M}_\uparrow \equiv |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$ による測定結果は 1 または 0 である（z 方向を向いたスピンのみを通すフィルターを考え，これにスピンが透過したら 1，透過しなかったら 0 を返すような装置を考えてみよ）．測定結果が 1 という結果が現れる**確率**は

$$P_\uparrow \equiv \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{M}_\uparrow) \tag{5}$$

で与えられる．スピンが下向きである確率 $P_\downarrow$ は射影演算子 $\hat{M}_\downarrow \equiv |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ による測定で得られる（二者択一なので $P_\downarrow = 1 - P_\uparrow$）．特に $\hat{M}_\uparrow + \hat{M}_\downarrow = \hat{1}$（恒等演算子），$\hat{M}_\uparrow - \hat{M}_\downarrow = \hat{\sigma}_z$ の関係がある．(1) 式の場合は $P_\uparrow = |\alpha|^2$ である．従って状態 $|+\rangle$ では $P_\uparrow = 1/2 = P_\downarrow$ となり，測定結果は 1 と 0 がランダムに同じ頻度で現れる．測定装置を改造してスピンが上向きなら 1，下向きなら -1 を表示するようにすると（前の装置で測定結果を 2 倍してから 1 を引けば良い）測定結果の期待値は $P_\uparrow - P_\downarrow = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z) \equiv \langle\hat{\sigma}_z\rangle$ となる．

測定の方法を変えて，スピンの x 方向を測ってみよう．射影演算子 $\hat{M}_+ \equiv |+\rangle\langle+|$ を選ぶとスピンが x 方向を向くという結果，1 が現れる確率は $P_+ \equiv \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{M}_+)$ である．x 方向を向くときは 1，その反対を向くときは -1 とするように決めるとその期待値は $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_x) \equiv \langle\hat{\sigma}_x\rangle$ で与えられる．さらに一般化して x-z 面内で z 軸から角度 θ 方向に向いているかどうかを測ったときの期待値は $\hat{s}_\theta \equiv \hat{\sigma}_z \cos\theta + \hat{\sigma}_x \sin\theta$ を用いて $\langle\hat{s}_\theta\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{s}_\theta)$ を計算すれば良い．

1.2 量子もつれ

1.1 節で考えた 1 スピンの量子状態とその測定を拡張して 2 つのスピン (1,2) を考える．2 スピンの状態ベクトルの規格直交基底は次の 4 つである：$|\uparrow,\uparrow\rangle$，$|\uparrow,\downarrow\rangle$，$|\downarrow,\uparrow\rangle$，$|\downarrow,\downarrow\rangle$．ここで前の記号がスピン 1，後の記号がスピン 2 の状態を表すとする．1 スピンの場合と同様に任意の物理的状態はこれらの重ね合わせにより表される．特に

$$|\Psi^-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle) \tag{6}$$

の状態を Bell 状態*2) と呼ぶ．これはスピン角運動量の見方で言うと，スピン一重項状態である．このような状態にある 2 つのスピンは，例えば $|\uparrow,\downarrow\rangle$ で表される直積状態（スピン 1 が上向きでスピン 2 が下向き）とは質的に異なる**量子もつれ**状態にある．まずスピン 1 のみを測定して，スピン 2 については全く無視してみる（あるいは遠くにあるのでその様子が分からないとする）．これは全系の密度行列 $\hat{\rho}_\Psi \equiv |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$ のスピン 2 に対する**部分トレース**を取ることに相当する．つまり

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1 \equiv \mathrm{Tr}_2(\hat{\rho}_\Psi) &= \langle\uparrow_2|\hat{\rho}_\Psi|\uparrow_2\rangle + \langle\downarrow_2|\hat{\rho}_\Psi|\downarrow_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}(|\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1| + |\downarrow_1\rangle\langle\downarrow_1|)\end{aligned} \tag{7}$$

となる．(5) 式よりスピン 1 を測定した結果は上向きと下向きが共に確率 1/2 で全くランダムに現れる．同様のことがスピン 1 のことを全く無視した

*2) 最大量子もつれ状態とも呼ばれる 4 つの状態のうちの一つである．他には，$|\Psi^+\rangle \equiv (|\uparrow,\downarrow\rangle + |\downarrow,\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$, $|\Phi^\pm\rangle \equiv (|\uparrow,\uparrow\rangle \pm |\downarrow,\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ が有る．

スピン2の測定結果に対しても言える．ところが，スピン1の測定結果とスピン2の測定結果をつき合わせてみると，それらには必ず反相関が現れる．つまりスピン1が上向きと測定されたら，スピン2は下向きと測定され，その逆も成り立つ*3)．比較のため次のような状態を考えてみる：

$$\hat{\rho}_c \equiv \frac{1}{2}(|\uparrow,\downarrow\rangle\langle\uparrow,\downarrow| + |\downarrow,\uparrow\rangle\langle\downarrow,\uparrow|). \qquad (8)$$

すなわちスピン1が上向き；スピン2が下向きのペアか，スピン1が下向き；スピン2が上向きのペアのどちらかを確率 1/2 で準備する．この場合も，スピン2に対する部分トレースを取った結果は (7) 式と一致し，スピン1に対する測定結果はランダムである（スピン2に対する結果も同じ）．またそれぞれの測定結果をつき合わせてみると，反相関が現れる点も上の結果と同様である．このような相関のことを**古典相関**と呼ぶ．当たりが一つしかないくじを引くとき，誰かが当たりを引いたら残りのくじは外れである，というようなことである．しかし量子もつれ状態はこれとは区別すべき性質，**量子相関**，を持っている．それを観るために，測り方を変えて x 方向の大きさを測ることにしてみよう（x 基底測定）．(2) 式を逆に解いて，(6) 式の $|\uparrow\rangle$，$|\downarrow\rangle$ を $|+\rangle$，$|-\rangle$ を使って書き直してみると，

$$|\Psi^-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle) \qquad (9)$$

となる．従ってスピン1が x 方向なら，スピン2が $-x$ 方向であるという結果（あるいはその反対）が現れ，完全に反相関がある．実はスピン一重項状態はスピンの向きに関して等方的なのでスピンを測る向き θ に依らずこのような相関が現れる．一方 (8) 式の $\hat{\rho}_c$ で表される古典相関状態の場合は，

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_c = \frac{1}{4}(&|+,+\rangle\langle+,+| + |+,-\rangle\langle+,-| \\ &+ |-,+\rangle\langle-,+| + |-,-\rangle\langle-,-| \\ &+(\text{非対角項 4 項})),\end{aligned} \qquad (10)$$

となる．従って2つのスピンの x 方向の測定結果は，$(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ がランダムに現れる．さらにスピン1を z 基底，スピン2を x 基底で測定することを考える．そのため (6) 式のスピン2の部分を x 基底で書き直すと $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow,+\rangle - |\uparrow,-\rangle - |\downarrow,+\rangle - |\downarrow,-\rangle)$ となる．従って2つのスピンの測定結果には何の相関もなく $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ がランダムに 1/4 の確率で現れる．以上の結果を表1に纏める．ただし括弧内は古典相関の場合である．この結果はスピン1とスピン2を非常に遠くに引き離した後にそれぞれを測定したとしても同じである．基底の選択は遠く離れた地点では独立になされるのにもかかわらず，同じ基底を選択した場合にのみ必ず相関が保たれるのは直感的には不可解である．

表1　量子もつれ状態にある2スピンの測定結果．

スピン 1/2	z 基底	x 基底
z 基底	反相関	無相関
x 基底	無相関	反相関（無相関）

1.3 Bell の不等式

何らかの方法で準備されたスピン対をたくさん準備し，それぞれ2つの測定器（A, B）に送り測定する．測定器Aは2つの測定方法 α, γ によりそれぞれ結果 a, c を得る．また測定器Bは2つの測定方法 β, δ によりそれぞれ結果 b, d を得る．それらの結果 a, b, c, d は $+1$ か -1 のどちらかである．後でこの実験の結果を持ち寄り，測定結果を次のように解析する．2つの測定器 A, B はそれぞれの測定方法を勝手にランダムに選ぶとする．測定方法の組 (α, β) が選ばれた回数 $N_{\alpha,\beta}$ は全測定回数 N の約 1/4 となる．そこで次のような期待値を計算する：

$$\langle ab\rangle = \frac{1}{N_{\alpha,\beta}} \sum_{i=1,N_{\alpha,\beta}} a_i b_i. \qquad (11)$$

ただし a_i, b_i は (α, β) の測定方法が選ばれた中で i-番目の測定結果である．他の3種類の測定方法による期待値 $\langle ad\rangle$，$\langle cb\rangle$，$\langle cd\rangle$ も同様に計算し，次の量を定義する：$C \equiv \langle ab\rangle - \langle ad\rangle + \langle cb\rangle + \langle cd\rangle$．もしスピン1の測定結果 a がスピン2の測定方法 β か δ かに依存せずに決まっていると仮定す

*3)　射影演算子 $\hat{M}_{\uparrow\downarrow} \equiv |\uparrow,\downarrow\rangle\langle\uparrow,\downarrow|$ により (5) 式を用いて確率 $P_{\uparrow\downarrow}$ を計算する．同様にして $P_{\downarrow\uparrow}$ も求め $P_{\uparrow\downarrow} + P_{\downarrow\uparrow} = 1$ が得られる．すなわちこれ以外の測定結果は現れない．

る（局所的実在性）と，$\langle ab\rangle - \langle ad\rangle = \langle a(b-d)\rangle$ の様に平均として括ることができる．その場合多数のスピン対を測定した結果に対し，次の関係

$$C = \langle a(b-d) + c(b+d)\rangle$$

が成立する．この式で $a(b-d)+c(b+d) = \pm 2$ が成立することに注意する*4)と，次の Bell の不等式（考案した Clauser–Horne–Shimony–Holt の頭文字から CHSH 不等式とも呼ばれる）が得られる：

$$|C| \leq 2. \tag{12}$$

さてこの C を量子力学の枠組みで調べてみよう．2 つのスピンは (6) 式の量子もつれ状態にあるとする．測定器 A はスピン 1 を角度 α, γ で測定することとし，また測定器 B はスピン 2 を角度 β, δ で測定する．例えば測定結果 a, b の期待値を見積もると*5) $\langle ab\rangle = \langle \hat{s}_\alpha \otimes \hat{s}_\beta\rangle = -\cos(\alpha-\beta)$ となる．従って

$$\begin{aligned} C &= -\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha-\delta) \\ &\quad -\cos(\gamma-\beta) - \cos(\gamma-\delta). \end{aligned} \tag{13}$$

特に $\alpha-\beta = \beta-\gamma = \gamma-\delta = \frac{\pi}{4}$ となるように測定角を選ぶと $C = -\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{3\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(-\frac{\pi}{4}) = -2\sqrt{2} < -2$ となり，Bell の不等式 (12) と明らかに矛盾する[2]．Bell の不等式が成立しないことは Alain Aspect（1947–）らが 1982 年に実験的に示した．その物理的意味は Bell の不等式の導出の際に仮定した局所的実在性（EPR パラドックスの議論もここに基礎を置いている）に問題があるということだ．すなわち測定していない物理量について，その値が測定したときと同じように存在していると考えてはいけないということである[3]．

2. 量子暗号

現代の高度化した情報化社会ではインターネットでやり取りされる通信の安全性が特に重要となっている．古典伝送路では正当な送受信者に知られることなく，通信内容を盗み出すことが原理的には可能である．通信の秘匿性を高めるために暗号技術が用いられるが，それに必要な秘密鍵（十分長いランダムなビット列）を如何にして遠隔地にいる正当な送受信者間で共有するかが課題であった*6)．1.2 節で議論したように，量子もつれ状態にある 2 スピンは二者が同じ測定方法を選ぶと確定的に反相関する結果を与える．しかし測定方法が異なる場合はその結果には全く相関がなくなってしまう．この性質を使うと遠隔地の二者（Alice と Bob と呼ぼう）間で秘密鍵を共有することができる．このように，量子力学の性質を巧みに使った量子暗号（量子鍵配送とも呼ぶ）が Bell の不等式の研究などに引き続き立ち上がった量子情報科学の流れの中で生まれてきた．量子もつれはこの量子暗号や，後で述べる量子中継で本質的な役割を果たしている．

2.1 量子暗号プロトコル

長距離に渡って量子力学的性質を保持する唯一の物理系は光子であり，これ以降の議論はスピンに代わり光子の量子状態，特にスピンとの対応がつけやすい光子の偏光状態を用いる．基本となる規格直交基底として縦偏光状態 $|V\rangle$ と横偏光状態 $|H\rangle$ を取ると量子もつれ状態は偏光もつれ状態となり $|\Psi^-\rangle = (|V,H\rangle - |H,V\rangle)/\sqrt{2}$ である．量子もつれ光子対の生成は光学結晶の非線形光学過程や，2 つの単一光子とビームスプリッターを用いて実現されている．では量子もつれ光子対を用いる量子暗号である BBM92 プロトコルを具体的に説明しよう（Charles Bennett（1943–), Gilles Brassard（1955–), David Mermin（1935–）により 1992 年に提案された．図 1 上）．偏光もつれ状態の光子対を生成する装置を準備し，そのうち一

*4) $b=d$ のとき，$b+d=\pm 2$ なので第二項から ± 2．$b=-d$ のとき，$b-d=\pm 2$ なので第一項から ± 2．

*5) 導出は次のようにする（$\otimes$ は演算子の直積を表す）：

$$\begin{aligned} \langle ab\rangle &\equiv \mathrm{Tr}\,\{\hat{\rho}_\Psi \hat{s}_\alpha \otimes \hat{s}_\beta\} = \left\langle \Psi^- | \hat{s}_\alpha \otimes \hat{s}_\beta | \Psi^- \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_{z1} \otimes \hat{\sigma}_{z2} | \Psi^- \right\rangle \cos\alpha\cos\beta \\ &\quad + \left\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_{x1} \otimes \hat{\sigma}_{x2} | \Psi^- \right\rangle \sin\alpha\sin\beta \\ &= -\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

*6) それを解決するために考案されたのが公開鍵暗号方式である．受信者（Bob）は暗号化のための鍵を公開鍵として公開する．送信者（Alice）はこれを用いて情報を暗号化し Bob に送る．復号化を可能にする鍵は Bob のみが秘密鍵として所持しているので，安全に情報を送ることができる．暗号化と復号化で異なる鍵を実現するために整数論の性質が用いられている．

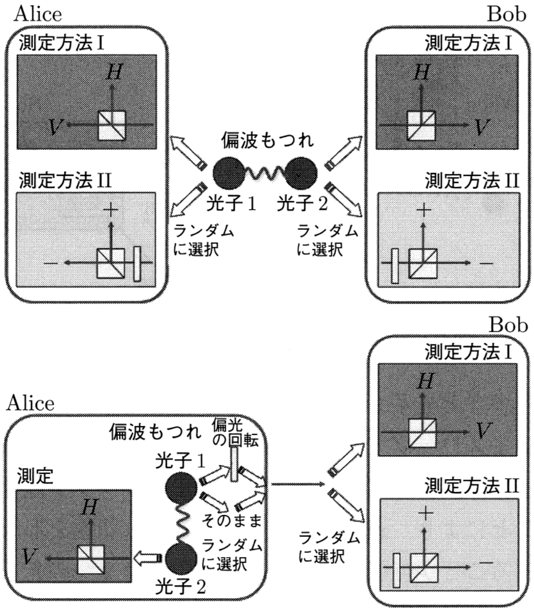


図 1　BBM92 量子暗号と BB84 量子暗号の説明．長方形は 1/2 波長板を表す．

光子を遠く離れた Alice に，もう一つは別の遠隔地の Bob に送る．途中で光子の偏光状態は変化しないものとする*7)．受信者 Alice, Bob はそれぞれ次の測定方法 I, II のうち一つをランダムに選んで，送られてきた光子の偏光状態を測定する．測定方法 I は縦偏光 $|V\rangle$ か横偏光 $|H\rangle$ かを区別するもので，偏光板と単一光子検出器で実装できる．測定方法 II は偏光板の手前で光子の偏光を $-45°$ 回転させる装置（1/2 波長板）を配置することにより，$|\pm\rangle \equiv (|V\rangle \pm |H\rangle)/\sqrt{2}$ の 2 つの状態を区別する．Alice と Bob は多数の光子対に対して*8) これらの測定の結果を記録しておく．測定終了後二者は測定結果は秘密にしたまま，それぞれの光子に対してどの測定方法を選んだかを相手に伝える．同じ測定方法を選んだ場合の測定結果*9) のみを残すと，Alice が持つビット列を反転したものは Bob が持つビット列と完全に一致するはずである．

盗聴者は途中の経路で光子を測定しようとしても，まだ鍵はできていないので情報を盗まれる心配はなく，その結果量子もつれ状態は混合状態となる．また盗聴者が光子対生成装置を乗っ取って，自分の好きな古典的相関をもつ二光子を送りつけるという戦略も失敗する．これらの侵害は，二者が適当な割合で秘密鍵を公開してそのエラー率を確認することにより*10) 発覚する．経路での損失や物理的擾乱，盗聴者の侵害を含む様々な過程で量子エラーが発生するが，これらは古典的なエラー訂正を行うことによりその影響を抑えることができる．最後にこれらの手続きで盗聴者に盗まれたと想定される情報を零にするためにプライバシー増強と呼ばれる操作を行うことにより秘密鍵が得られる．

量子もつれ光源を Alice 側に置き，Alice の偏光基底の回転の選択を光子 1 ではなく光子 2 に対して行うと図 1 下のようになる．さらに Alice 側を $|H\rangle, |V\rangle, |+\rangle, |-\rangle$ の四状態をランダムに切り替える単一光子光源に置き換えると Bennett と Brassard により 1984 年に提案され現在主流の BB84 プロトコルとなる．実験では単一光子光源ではなく強度を非常に減衰させたレーザー光源が用いられることが多い．2010 年には（独）情報通信研究機構が中心となり東京において国内および欧州の研究機関の協力のもと 50 km 圏で毎秒 100 k ビットの秘密鍵生成のデモを行った（Tokyo-QKD）[4]．秘密鍵生成レートは伝送に用いる光ファイバーの損失，単一光子検出器の暗計数*11) などに制限され，伝送距離と共に指数関数，あるいはそれより急速に減少するので実用上は 100 km 程度

*7)　光ファイバーではファイバーの複屈折性と物理的擾乱により偏光状態はランダムに変化してしまうので，偏光状態より位相状態を用いたほうが良い．

*8)　どの 2 つの光子が対であったかは古典的な方法（同期信号など）で決定できるとする．

*9)　光ファイバーの損失や光子検出器の量子効率の低さにより光子が測定できなかった場合には，その旨も相手に伝える．ビット列の長さは短くなるが二者がどちらも検出に成功したイベントのみを用いて秘密鍵が作れる．

*10)　BBM92 は 1.3 節の Bell の不等式の解析において，$\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \delta = \pi/2$ と取ることに対応する．従って $C = -2$ となる．一方盗聴者は次のにせの二光子状態を送り出すとする：

$$\hat{\rho}_c = \frac{1}{2}(|\hat{n}, -\hat{n}\rangle\langle\hat{n}, -\hat{n}| + |-\hat{n}, \hat{n}\rangle\langle-\hat{n}, \hat{n}|).$$

盗聴者が送り出す（測定により得られた）光子対は偏角を表す 2 つの角度 θ, ϕ を用いて $|\hat{n}\rangle \equiv \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$, $|-\hat{n}\rangle \equiv -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$ とした．これにより C を見積もると $C \geq -1$ であるので区別できる．

*11)　現在用いられている光ファイバーでは 100 km の伝送により光子数は約 1/100 となる．また暗計数とは，光子が届いていないのに検出器が発動してしまう誤動作を言う．

の伝送距離が限界であると言われている．そのため遠距離の相手と秘密鍵を共有するには，途中に信頼できる中継地を配置する必要がある．ところが物理的性質を用いることにより，中継地を信頼せずとも距離と共に指数関数的に減少する秘密鍵生成レートを回避できる方法が提案された．それが**量子中継**である．

2.2 量子中継

BBM92 で説明したように遠隔地の間で量子もつれ状態を共有できれば，秘密鍵を生成できる．しかし伝送損失により光子数が距離とともに指数関数的に減少するので生成できる量子もつれ状態も同様に減少してしまう．量子中継は**量子スワップ**という方法を用いて，効率的に遠隔地に量子もつれを生成する．そのための基本的な技術が**量子テレポーテーション**である．

そこで，Alice が持つ未知の状態 $|\psi\rangle$ にある光子 1 を Bob に送ることを考える（スピン状態を偏光状態と読み替えてほしい）．単純に z 基底で測定してしまうと (1) 式で言えば $|\alpha|^2$ の確率で 1 が得られるだけである．一回の測定で $|\psi\rangle$ に関して得られる情報は非常に乏しい．今 Alice と Bob が Bell 状態にある光子 2,3 をそれぞれ持っているとする．ここで Alice の手元にある光子 2 と未知の状態の光子 1 に対して，**Bell 測定**と呼ばれる測定，すなわち 1.2 節の脚注 *2) で紹介した 4 つの Bell 状態のうちのどれであるかの射影測定を行う．そして得られる 4 種類のうちの一つの結果 (2 bit 古典情報) を通常のネットワークで Bob に送る．Bob は送られて来た情報を元に決められた基底変換を光子 3 に施すとその量子状態は $|\psi\rangle$ になる．光子自体が転送されるわけではないが，光子の量子状態が完全にコピーされ，もとの光子の状態は失われる，という意味で量子テレポーテーションと呼ばれる（図 2）．現在偏光などの光子の離散量子状態では 4 つの Bell 状態を区別できておらず，完全な量子テレポーテーションは実現していない．しかし連続量を用いた光の量子状態を操る実験では実現している[5]．

もし最初に光子 1 が別の光子 4 と量子もつれ状態であったとすると，この手順により最終的には光子 4 と光子 3 が量子もつれ状態になる．これが量子スワップである．中継地の間に形成された量子もつれ状態に対し順繰りに量子スワップを施すことにより，遠隔地の間に量子もつれ状態を形成することが可能である．Bell 測定では 2 つの光子を同時に測定する必要がある．今のところ光子対の発生は確率的であり，また一度発生した光子を止めておくことは困難である．そのために 2 つの光子が同時に Bell 測定装置に入る確率が小さく，量子スワップの効率は非常に低い．この課題を解決するために，光子の量子状態をいったん冷却原子系や固体中のスピンなどへ転写して，同時測定の効率を上げることが考えられている．光子の量子状態を保存するデバイスは**量子メモリ**と呼ばれ，様々な形態の量子状態の間で量子スワップを行い量子情報処理を行うハイブリッドシステムに関して現在活発に研究が進められている．これから量子もつれは情報処理の重要な「リソース」となるかもしれない．

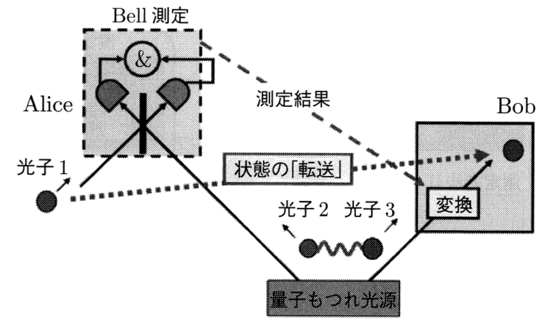


図 2　量子テレポーテーションの模式図．

参考文献

1) J. Bell, *Physics* **1**, 194 (1965).
2) Asher Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
3) 詳しい物理的説明は次が参考になる：清水明，『新版量子論の基礎―その本質のやさしい理解のために』（新物理学ライブラリ）サイエンス社 (2004).
4) Tokyo QKD の模様は以下の URL を参照のこと：http://www.nict.go.jp/video/quantum-cryptography.html
5) 最近の解説として，古澤明，応用物理 **79**，第 2 号 120 (2010).

（とくら・やすひろ，筑波大学大学院数理物質科学研究科，NTT 物性科学基礎研究所）

ボース・アインシュタイン凝縮

鳥井 寿夫

1. はじめに：20世紀の人，アインシュタイン

多くの人は，アインシュタイン（図1）といえば「相対性理論」というイメージを持っているのではないでしょうか．事実，アインシュタインの名が世界的に広まったのは，1919年の皆既日食の際に太陽の近くを通る星からの光が一般相対性理論（1916年）の予言通りに曲がることが観測されたときでした．また，アインシュタインといえば，原子力エネルギーを説明する際によく引き合いに出される有名な式 $E = mc^2$ を思い起こす人もいるでしょう．この式は質量とエネルギーの等価性を表すもので，特殊相対性理論（1905年）から導き出されたものです．米国のタイム誌は20世紀を代表する人物（person of the century）としてアインシュタインを選びましたが，20世紀の負の側面を象徴する原子爆弾の生みの親という，いささか間違ったイメージも影響しているのかも知れません．

このように相対性理論のイメージが強いアインシュタインですが，量子論の分野でも数多くの功績を残しています．おそらく一番有名なのは，1905年の光量子仮説でしょう．アインシュタインは，光が $E = h\nu$ （$h \approx 6.62 \times 10^{-34}$ Js はプランク定数，ν は光の周波数）というエネルギーを持つ粒子だと考えると，当時謎であった光電効果をうまく説明できることを見出しました（この功績により，アインシュタインは1921年のノーベル物理学賞を受賞しています）．また，1917年には「輻射の量子論について」という論文において，遷移確率という概念を導入し，光量子の放出過程には自然放出と誘導放出（これはレーザーの原理です）の2種類があること，光量子の吸収・放出には運動量 $p = h/\lambda$ （λ は光の波長）が付随すること，など多くの重要な発見をしています．そして1925年，シュレーディンガー，ハイゼンベルグ，ディラックらによって量子力学が定式化される以前に，**ボース・アインシュタイン凝縮**（BEC: Bose–Einstein condensation）と呼ばれる特異な量子現象を予言します[1)]．これが本稿のメインテーマです．アインシュタインが量子力学の発展にどのように寄与したのか，以下でもう少し詳しく見ていくことになりますが，その概要を図2に示しておきます．

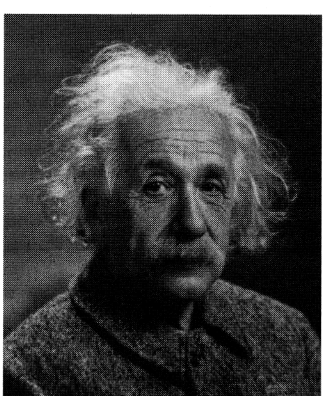


図1　20世紀を代表する人物，アルベルト・アインシュタイン．

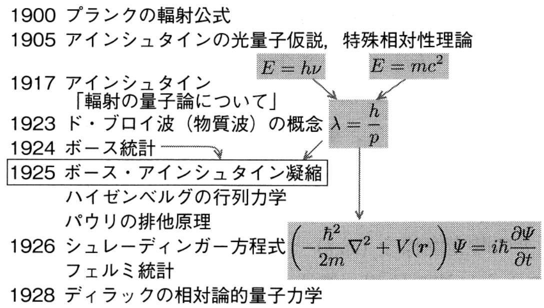


図2　量子力学形成の歴史．アインシュタインが多くの貢献をしている．

2. ボース・アインシュタイン凝縮とは何か

BEC とは何かを一言で表現するなら，「巨視的（マクロ）な数の粒子が，ある温度以下で単一の量子状態を占める現象」です．具体的な実現例として**超伝導**（クーパー対と呼ばれる電子対の BEC），液体ヘリウムの**超流動**が挙げられます．しかしアインシュタインが 1925 年に BEC を予言した際に想定していたのは，箱の中で互いに相互作用せずに動き回っている粒子集団，つまり「理想原子気体」でした．超流動を起こしているヘリウム原子は液体の状態にあり，また超伝導体中のクーパー対はクーロン力で反発しあう電子からできています．両者とも「理想原子気体」からは程遠い状態にあり，実際，これらの現象が BEC によるものと理解されるまでに長い時間がかかっています．

アインシュタインが当初想定していた「原子気体の BEC」は，アインシュタインの予言から実に 70 年後の 1995 年に実現されました．これは，その後の原子物理学や凝縮系物理学の流れを大きく変える出来事でした．それにしても，なぜ原子気体の BEC 実現に 70 年という長い年月がかかったのでしょう．そして，そんなにも難しい原子気体の BEC を実現させる鍵は何だったのでしょうか．以下では，原子気体 BEC が実現されるまでの経緯を，アインシュタインが BEC を予言するきっかけとなった 2 つの出来事，ド・ブロイによる物質波の提唱とボースによるボース統計の発見にまで遡って解説したいと思います．

3. ド・ブロイの博士論文（物質波の概念）

アインシュタインが 1905 年に提唱した光量子のエネルギーを表す式 $E = h\nu$ は，「振動数 ν の波は，エネルギー $h\nu$ を持つ粒子のように振舞う」と主張していますが，1923 年にその逆，つまり「エネルギー E を持つ粒子は，振動数 $\nu = E/h$ の波のように振舞う」と考えた若者がいました．当時大学院生だったド・ブロイです．アインシュタインの特殊相対性理論によると，静止した質量 m の粒子のエネルギーは $E = mc^2$ です．したがって，静止した粒子を波として考えた場合，その振動数は $\nu = mc^2/h$ となるでしょう．この波の振動の様子を，粒子とともに静止している慣性系（その時空座標を (x,t) とする）から観測すると，図 3 のように波の位相（濃淡で表している）が時間の経過とともに変化して見えます．さて，この振動の様子を，x 軸正の方向に速度 v で動いている（粒子が $-v$ で動いて見える）別の慣性系（その時空座標を (x',t') とする）で観測するとどうでしょう．特殊相対性理論によると，(x,t) と (x',t') はローレンツ変換で結びついており，x' 軸（$t'=0$ の線）は，x 軸（$t=0$ の線）に対して傾いています（時間は観測者の運動状態に依らず一様に流れる，という我々の日常感覚は正しくないのです）．したがって，図 3 から明らかなように，粒子が動いて見える慣性系においては，時間的のみならず空間的にも位相が変化して見えます．その波長 λ はローレンツ変換を用いると，

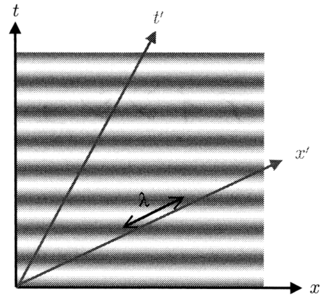


図 3　波の位相のローレンツ変換．ある慣性系における時間的変化は別の慣性系では空間的変化として観測される．

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{1}$$

で与えられることがわかります．ここで p は粒子が動いて見える慣性系から見た粒子の運動量です．これが粒子の波動性を表す有名なド・ブロイの関係式で，λ は**ド・ブロイ波長**と呼ばれます．式 (1) は，波数 $k = 2\pi/\lambda$ を用いれば $k = p/\hbar$ ($\hbar \equiv h/2\pi$) と表現できます．一方，粒子が動いて見える慣性系における波の角周波数 ω は，粒子の相対論的エネルギー $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ を $\hbar$ で割ったもので与えられます．ここで波の群速度（波束の速度）$d\omega/dk$ を計算してみると，何と古典的な粒子の速度 v に一致します．このことから，ド・ブロイは「粒子は波動性を持つ」と提唱したのです．

このように，ド・ブロイの物質波のアイデアは，アインシュタインの光量子仮説と特殊相対論が推論の出発点にあったのです．このド・ブロイのアイデアは，あまりに斬新だったため，指導教官のランジュバンがアインシュタインにド・ブロイの博士論文を送って意見を仰いだのは無理もありません．アインシュタインは「それは単なる類推にとどまらないものがあると思います」と返答しました．アインシュタインのお墨付きをもらったド・ブロイは，1924 年に無事博士号を取

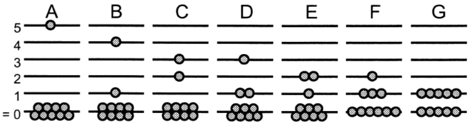
得します（そして1929年にノーベル物理学賞も受賞することになります）．ちょうどその頃，絶妙なタイミングでインドからアインシュタイン宛に1編の論文が届きます．

4. ボース統計の発見：個性のない粒子たち

1924年，アインシュタインはインドの物理学者ボースから「プランクの法則と光量子仮説」と題する論文を受け取りました．その論文では，光量子を互いに区別がつかない粒子と考えて統計を取ることにより，黒体輻射のスペクトルを表すプランクの輻射公式を導出していました．この論文で採用されていた統計の取り方—**ボース統計**（もしくは**ボース・アインシュタイン統計**）—の重要性に気づいたアインシュタインは，論文をドイツ語に翻訳してボース単名でドイツの物理学雑誌に投稿します[2)]．

ボースの論文の真に独創的な点は「粒子を区別しない」という考え方でした．我々は普通，人には個性があって，自分と他人は別人だと思っています．自分が持っている10円玉と他人が持っている10円玉ではどうでしょうか．お金としては同じ価値を持っているので10円玉には個性はないという考え方もできますが，表面の傷とか製造年などに僅かな個性を見出すことができます．実際，自分と他人の10円玉をこっそり交換しても，その僅かな個性を頼りに交換したことに気がつけるはずです．それでは，自分が持っているミクロな粒子と他人が持っているミクロな粒子を誰かがこっそり交換した場合に，あなたはそれに気がつくことができるでしょうか．そのミクロな粒子が光子の場合，交換したことを原理的に知ることができない，つまり光子には**不可弁別性**（英語ではindistinguishabilityといいます）があることを最初に統計に取り入れたのがボースだったのです．この粒子の不可弁別性は，光子に限らず（最近発見されたヒッグス粒子も含めた）すべての素粒子，また（同じ内部状態にある）原子や分子にも当てはまることがわかっています．不可弁別性は量子論における粒子の基本的な性質なのです．

ここで，具体的な例を使って，粒子の不可弁別性を取り入れた量子論的な統計（ボース統計）と，粒子が区別できると考える古典的な統計の本質的な違いを説明したいと思います．ある箱の中に閉じ込められた$N = 10$個の粒子を考えます．簡単のため，その箱の中で粒子のとり得る量子状態のエネルギーは等間隔だと仮定し，量子状態の間隔をエネルギーの単位に選びます．この



	A	B	C	D	E	F	G
量子的重み	1	1	1	1	1	1	1
古典的重み	10	90	90	360	360	840	252

図4　10個の粒子に$E = 5$のエネルギーを配分したときの可能な配置パターン．

粒子集団に$E = 5$のエネルギーを与えた場合，図4に示すように粒子のとり得る配置にはAからGの7パターンがエネルギー的に許されます．統計力学には，エネルギー的に可能な状態は等しい確率で実現されるという「等確率の原理」があります．この原理を適用すると，各エネルギー準位の平均粒子数を計算することができます．ここで注意が必要です．ボース統計では粒子を区別しないので，AからGの7パターンが等しい確率で起こります．しかし，粒子が区別できると考える古典統計では，AからGの各パターンを実現する場合の数が$W = 10!/(n_1!n_2!n_3!\cdots)$となります．ここで$n_i$は各エネルギー準位に存在する粒子数です．したがって，古典統計では，この「古典的重み」に比例した確率で各パターンが実現されることになります．各エネルギー準位の平均粒子数を，ボース統計と古典統計それぞれについてプロットしたのが図5です．古典統計を用いた結果は，いわゆるボルツマン分布$\bar{n}_i = Ne^{-\beta\varepsilon_i}/Z$（$\bar{n}_i$は$i$番目の準位の平均粒子数，$N$は全粒子数，$\beta$は逆温度，$\varepsilon_i$は準位のエネルギー，$Z \equiv \sum e^{-\beta\varepsilon_i}$は状態和）によく従っています．それに対し，ボース統計を用いた結果は，明らかにボルツマン分布に従っていません．注目すべきは，最低エネルギーの量子状態の平均粒子数が古典統計に比べて増えている点です．このように，「粒子が原理的に区別できない」という性質が，「最低エネルギー状態を占める粒子数の増加」という結果を招くのです．これは驚くべきことではないでしょうか．

ここまで，量子論的な（粒子を区別しない）統計法としてボース統計のみを考えてきましたが，同じく量子論的な統計法で「**フェルミ統計**（もしくは**フェルミ・ディラック統計**）」と呼ばれる別の統計法が1926年に発見されます．フェルミ統計は，単一の量子状態には1つの粒子しか占有できないという「パウリの排他原理」を導入した量子統計法で（ボース統計では占有数に制限はありません），電子がこの統計に従います．当時はどの粒子がどの統計に従うべきか定かではなかっ

	エネルギー準位						
パターン	0	1	2	3	4	5	古典的重み
A	9					1	10
B	8	1			1		90
C	8		1	1			90
D	7	2	0	1			360
E	7	1	2				360
F	6	3	1				840
G	5	5					252
合計	50	12	4	2	1	1	2002
平均粒子数（ボース統計）	7.14	1.71	0.57	0.29	0.14	0.14	
平均粒子数（古典統計）	6.43	2.47	0.82	0.22	0.045	0.005	

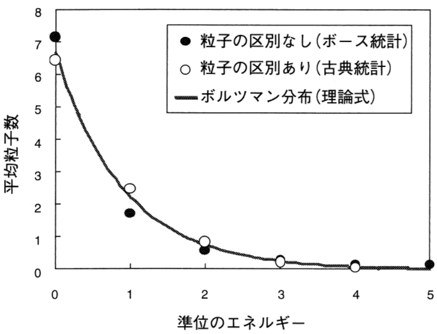


図 5　ボース統計および古典統計を用いた場合の各エネルギー準位の平均粒子数分布の比較．実線は古典統計（ボルツマン分布）の理論式．

たようですが，1927 年には，「整数のスピンを持つ粒子（ボソン）はボース統計，半整数のスピンを持つ粒子（フェルミオン）はフェルミ統計に従う」，という今日正しいとされている分類法に落ち着きました．ここで，それぞれの統計法における，単一の量子状態（エネルギー ε_i）を占める平均粒子数を表す式を示しておきます．

$$\bar{n}_i = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1} & \text{（ボース・アインシュタイン分布），} \\ \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1} & \text{（フェルミ・ディラック分布）.} \end{cases}$$

ここで $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$（$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数）は逆温度，μ は化学ポテンシャルです．ボース分布は $(\varepsilon_i - \mu) \to 0$ の極限で平均粒子数が無限大に発散し，この奇妙な性質が BEC と深く関係しています．ボース分布もフェルミ分布も，平均粒子数が 1 よりも十分小さい場合は $\bar{n}_i \simeq e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)} \propto e^{-\beta\varepsilon_i}$ と近似でき，これはボルツマン分布に他なりません．図 5 のグラフでボース統計と古典統計の結果が食い違っているのは，各量子状態の平均粒子数が 1 よりも十分小さくない状況にもかかわらず，古典統計を適用してしまったためなのです．

5. ボース・アインシュタイン凝縮の予言

1925 年，アインシュタインは箱の中に入った質量を持つ原子集団にボース統計を適用してみました．既にド・ブロイの物質波のアイデアを知っていたアインシュタインにとって，箱の中に閉じ込められた粒子，つまり物質波に対して，もともとは波と考えられていた光量子と同じようにモード（量子状態）を導入し，ボース統計を適用することは自然な発想だったのでしょう．その帰結としてアインシュタインが発見した奇妙な現象が BEC だったのです．

アインシュタインが発見したのは，ボース統計を 3 次元の箱に閉じ込められた粒子集団（以下「系」と呼びます）に適用すると，ある有限の温度で最低エネルギー状態を占める原子の数が巨視的にならざるを得ないということでした．その直感的説明はこうです．一般に 3 次元閉じ込めポテンシャルにおける量子状態は，図 4 の例のように下から等間隔に並んでいるのではなく，エネルギーが高くなるにつれて量子状態の数が増えていきます．単位エネルギーあたりの量子状態の数 $D(\varepsilon)$ を状態密度と呼びますが，3 次元箱型ポテンシャルの場合は状態密度がエネルギーの平方根に比例します（$D(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$）．系は自らのエントロピーを最大にするように，つまり最も場合の数が大きくなるように粒子を各量子状態に分布させるわけですが，系がある温度以下になると，最低エネルギー状態を占める粒子数を巨視的にしたほうが場合の数が増えるのです．なぜかといえば，系に手持ちのエネルギーが少ないので，巨視的な数の粒子を最低エネルギー状態に留めておき，それ以外の粒子（熱的粒子）にエネルギーを託して状態密度の大きい領域まで広がってもらったほうが，結果的に場合の数を最大にできるからです．このように，BEC の出現には「己を殺して他を生かす」機構が働いているのです（粒子には己と他の区別はないのだけれど）．

ちなみに，図 4 の例のようにエネルギーが等間隔に並んでいるような場合（これは 1 次元調和ポテンシャルのエネルギー準位に対応します），いくら粒子集団の温度を下げても BEC 相転移は起きません．状態密度がエネルギーとともに増加していないからです．もちろん，絶対零度においてはすべてのボース粒子が最低エネルギー状態に落ち込みますが，それは BEC 相転移とは呼びません．そもそも熱力学第 3 法則によれば，有限回の操作で絶対零度を実現することはできません．理想原子気体の場合，1 次元または 2 次元の箱型ポテンシャルでは BEC 相転移は起きないことが数学的に示されます．

6. レーザー冷却法の発展と原子気体BECの実現

3次元箱型ポテンシャル中の理想ボース気体がBEC相転移を起こす条件は，アインシュタインの1925年の論文で正しく導出されており，気体の空間密度をnとして$n \geq 2.612/\lambda_{\rm dB}^3$と表されます．ここで，$\lambda_{\rm dB} \equiv h/\sqrt{2\pi m k_{\rm B} T}$（$T$は気体の温度，$m$は粒子の質量）は熱的ド・ブロイ波長と呼ばれ，熱運動している粒子集団の典型的な運動量幅$\Delta p = \sqrt{2\pi m k_{\rm B} T}$と式(1)のド・ブロイの関係式で結ばれています（$\Delta p = h/\lambda_{\rm dB}$）．一般に，$\Delta k$の波数幅を持つ波を重ね合わせると，空間的な幅$\Delta x \approx 2\pi/\Delta k$を持つ波束ができます．ド・ブロイの関係式より，波数幅は運動量幅と$\Delta p = \hbar \Delta k$の関係にあるので，物質波の波束はおおよそ$\Delta x \approx h/\Delta p = \lambda_{\rm dB}$の幅を持ちます．したがって，BECの発生条件は「個々の粒子の波束が重なり合うとき」と表現することもできます．

アインシュタインの予言したBECの条件を実在の気体で実現することは可能でしょうか．一般に，実在の気体は温度を下げれば液化します．最も液化しにくい希ガスのヘリウムでさえ4.22Kで液化してしまいます．BECの条件（温度と密度の組み合わせ）の下では，周期律表にあるすべての原子は液体または固体の状態にあるのです．実際，アインシュタイン自身も実在気体におけるBECの実現には懐疑的だったと言われています．また，シュレーディンガーも1952年に出版した統計熱力学の教科書で，BECのような量子縮退の効果を「ファンデルワールス力の効果から切り離せる見込みはほとんどない」と述べています．一つの抜け道は，気体の「過飽和状態」を利用することです．もし過飽和状態の気体が液化するまでの時間が十分長ければ，その隙に気体を冷却してBECが実現できるかも知れません．しかし，過飽和状態を長く保つには気体の密度を十分薄くしなければならず，その代償として非常に長い熱的ド・ブロイ波長，つまり極低温を実現しなければ原子の波束を重ね合わせることができません．液体ヘリウムを用いる通常の冷凍機では，気体を過飽和状態に長く留めておきつつ，そのような極低温を実現することは極めて困難です．

状況を大きく変えたのは，1960年のレーザーの発明とその後のレーザー技術の発展でした．そして1975年，ヘンシュとショーロウはレーザー光を用いた原子気体の冷却法を提案します[3]．その原理は次のような

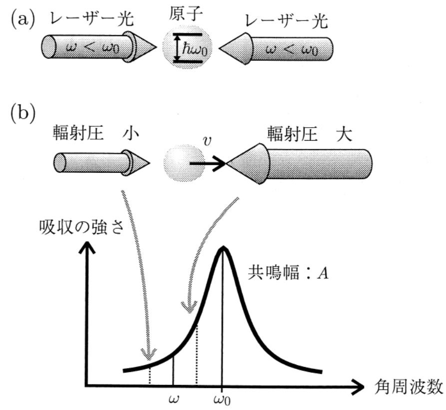


図6　ドップラー冷却の原理．

ものです．簡単のため原子は基底状態および励起状態を持つ2準位原子とし，1次元方向の運動のみを考えます．励起状態はアインシュタインが1917年に最初に指摘したように自然放出によって有限の寿命$\tau = 1/A$を持ちます．Aは**アインシュタインのA係数**と呼ばれ，単位時間あたりの自然放出レートを表します．この有限の寿命により，共鳴周波数は（角周波数の単位で）Aの幅を持ちます．これは**自然幅**（natural width）と呼ばれています．このように共鳴周波数が自然幅を持っている2準位原子に，図6(a)に示すように共鳴の中心周波数ω_0より自然幅程度低い周波数$\omega < \omega_0$を持つレーザー光を左右から原子に照射します．これもアインシュタインが1917年に指摘しましたが，光子の吸収には運動量$p = \hbar k$が伴うので，原子は単位時間に吸収した光子数に比例した力を受けます．これを**輻射圧**といいます．原子が静止していれば，原子が感じる左右のレーザー光の周波数は同じなので，左右のレーザーから受ける輻射圧はキャンセルします．しかし，原子が運動していると，運動方向と対向するレーザー光の周波数は，ドップラー効果によって正の方向に，つまり原子の共鳴周波数に近づくように$\Delta\omega_{\rm D} = kv$だけシフトし，逆に自分と同じ方向に向かうレーザー光の周波数は，共鳴周波数からさらに離れるように$\Delta\omega_{\rm D} = kv$だけシフトします（図6(b)）．結果的に，原子は自分の運動方向と対向するレーザー光からの輻射圧をより強く受け，減速，つまり冷却されることになります．この手法は**ドップラー冷却**と呼ばれます．到達温度は，光子を自然放出する際にランダムな方向に反跳運動量を受けることに起因する加熱効果とのバランスによって決まり，典型的には数百μK（室温の百万分の1）です．

3次元的なドップラー冷却は，1985年にベル研究所の

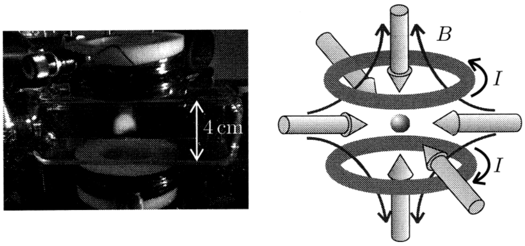


図 7　ガラスセル内で磁気光学トラップされたルビジウム原子集団．温度は百 μK，原子数は 10^{10} 個程度（東京大学鳥井研究室提供）．

チューによってナトリウム原子を用いて実現されました[4]．1987 年，チューと MIT のプリチャードは，四重極磁場による遷移周波数のゼーマンシフトと遷移の偏光依存性を巧みに利用して原子集団を冷却と同時に捕獲もする**磁気光学トラップ**（MOT: Magneto-Optical Trap）と呼ばれる手法を共同で開発しました[5]．MOT は数百 μK の冷却原子を大量に（$\sim 10^{10}$ 個）捕獲できるため，現在では原子物理関係の多くの研究室が基本的なツールとして用いています．図 7 は超高真空ガラスセル内で磁気光学トラップされたルビジウム原子集団の写真です．

1990 年代に入ると，レーザー冷却による原子気体 BEC の実現可能性が本格的に議論されるようになりました．しかし，レーザー冷却では光子の反跳運動量 $p = \hbar k$ に相当する温度（反跳限界温度）$T_R = (\hbar k)^2/2k_{\rm B}m$（$m$ は原子の質量）以下に原子を冷却することは一般に難しく，また原子集団の密度が高くなるとレーザー冷却がうまく働かないことも明らかになってきました．一方，MIT のクレップナーのグループは，1980 年代の初頭から水素原子の BEC を実現すべく実験を進めていました．1987 年，彼らはスピン偏極した水素原子を静磁場とのゼーマン相互作用を用いて捕獲し（磁気トラップ），磁気ポテンシャルの高さを徐々に下げることによって，運動エネルギーの高い原子を選択的に磁気トラップから取り除いて原子集団の温度を下げる蒸発冷却法を実現していました．コロラド大学のコーネル，ワイマンのグループ，および MIT のケタレーのグループは，水素原子に用いられていた磁気トラップ中での蒸発冷却法を，レーザー冷却されたルビジウム原子およびナトリウム原子にそれぞれ適用する道を選びました．そしてアインシュタインの予言から 70 年後の 1995 年，ついに気体原子の BEC が実現されたのです[6]．1998 年には水素原子の BEC も（レーザー冷却は用いずに）蒸発冷却法によって実現されました．コーネル，ワイマン，ケタレーの 3 氏には，2001 年のノーベル物理学賞が授与されました．

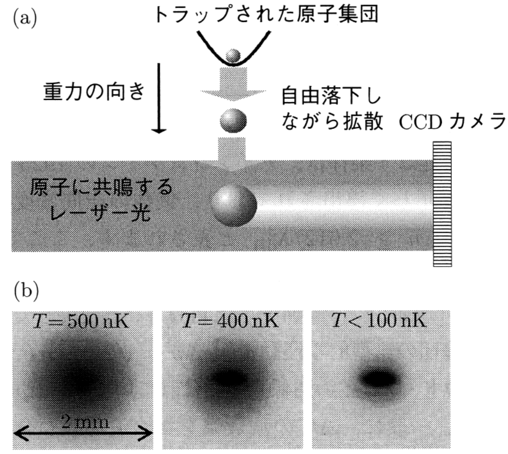


図 8　(a) 吸収イメージング法による原子気体 BEC の観測．(b) トラップから開放後 52 ms におけるルビジウム原子集団の吸収画像（東京大学鳥井研究室提供）．

原子気体 BEC の観測方法の一つを紹介しておきましょう．図 8 (a) に示すように，蒸発冷却後に原子を捕獲していたポテンシャルを切ると，その瞬間に持っていた運動量分布に従って原子集団は拡散します．適当な時間（数十 ms）拡散させれば，原子集団の空間分布は，初期の運動量分布を反映したものになります．この拡散した原子集団に共鳴するプローブ光を照射し，その透過強度を CCD カメラで撮影すると，原子集団の 2 次元運動量分布が影として観測できます．蒸発冷却によって様々な温度にまで冷却されたルビジウム原子集団をトラップから解放したときの吸収画像を図 8 (b) に示します．温度が約 500 nK のときは，運動量分布はほぼボルツマン分布に従っています．400 nK ではボルツマン分布に従わない鋭いピークが中心に現れています．これが最低エネルギー状態に落ち込んだ原子集団で，**ボース凝縮体**（Bose condensate）と呼ばれます．温度が 100 nK 以下のときは，ほぼ純粋なボース凝縮体が得られます．このように，吸収イメージング法によって BEC 相転移を視覚的に確認することができるのです．

7. おわりに

原子気体の BEC では，マクロな数の原子が単一の量子状態（重心運動の基底状態）を占めており，この状況は単一の量子状態（電磁波のモード）にマクロな数の光子が存在しているレーザーと類似しています．原子気体の BEC はまさにレーザーの原子版であり，「原子レーザー」と呼ばれることもあります（逆に，レー

ザーを「光子の BEC」と形容することもあります）．人類は今や光と原子の両方のレーザーを手にしたのです．原子気体の BEC は，原子間相互作用が制御できる理想的な量子凝縮系として，またはコヒーレンスの良い物質波として，理論と実験を問わず多くの研究者の興味を引き続け，現在では原子物理学，凝縮系物理学，量子光学などを取り込む大きなサブフィールドを形成しています．2013 年現在，13 種類の原子種（H, He, Li, Na, K, Ca, Cr, Rb, Sr, Cs, Dy, Er, Yb）において気体原子 BEC は実現されています．原子気体 BEC の初期の研究や，最近の話題に関しては，上田氏による解説記事[7]を参照してください．

本稿では，ボース・アインシュタイン凝縮の予言から実現までの約 70 年の歴史を振り返りましたが，改めてアインシュタインという人物の偉大さをお伝えすることも目的の一つでした．同時に，アインシュタインといえども，ボース・アインシュタイン凝縮の予言には自分より一回り以上も若いド・ブロイとボースの斬新なアイデアが必要であった，ということもお伝えしたいことでした．我々はアインシュタインのような独創性は持ち合わせていないかも知れませんが，それでも他者のアイデアに耳を傾ければ，それらを融合して価値あるものを生み出せるかも知れません．ちょうど原子気体 BEC がレーザー冷却と蒸発冷却を融合して実現されたように．

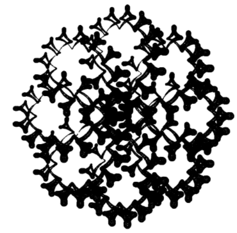
謝辞：ボース統計の説明法に関して，東京大学大学院工学系研究科の井上慎氏から貴重な意見をいただきました．ここに感謝いたします．

参考文献

1) A. Einstein, *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* (1925) 3–14.［邦訳：『アインシュタイン選集 1』湯川秀樹監修，中村，谷川，井上訳（共立出版，1971 年）p.136］.
2) S.N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178–181 (1924).
3) T.W. Hänsch and A.L. Schawlow, *Opt. Commun.* **13**, 68 (1975).
4) S. Chu, L. Hollberg, J.E. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48 (1985).
5) E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987).
6) M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995); K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
7) 上田正仁：パリティ 第 14 巻 第 9 号 18–27 (1999); 応用物理 第 82 巻 第 9 号 744–753 (2013).

（とりい・よしお，東京大学大学院総合文化研究科）

物性におけるトポロジーとその応用



永長　直人

1. なぜトポロジーか？

トポロジーとは幾何学の一分野で，連続変形で互いに移り変わることができる図形を同一視した時に，図形がどのように分類できるかを扱う学問である．幾何学がなぜ物性物理学に関係するのか，疑問に思われる読者も多いであろう．まず，その背景からお話ししよう．量子物理学の理論体系は，抽象的な数学の言葉で表現され，状態を表すヒルベルト空間のベクトル（波動関数）の時間発展と，観測理論の２本立てで構成されている．この**ヒルベルト空間**は状態の線形結合，つまり重ね合わせも量子状態となるような性質を持っており（無限次元ではあるが）ベクトル空間である[1]．一方物理量は，行列に対応し，状態を別の状態へと変換する働きを持つ．したがって，このヒルベルト空間の幾何学が量子論に密接に関与することは，容易に想像できるであろう．この重ね合わせは，量子波動の干渉現象を表しているので，別の見方をすると，幾何学によって干渉が支配されているとも言える．

この量子状態はエネルギーによって特徴づけられる．そして，物性物理学が対象とする低いエネルギーの現象を支配しているのは，ヒルベルト空間全体ではなくて，そのごく限られた部分空間である場合がほとんどである．そして，この部分空間は一般には，曲がった空間となっている．ちょうど３次元空間は平坦なのに，その中の２次元曲面は一般には曲がりくねっていることを思い出してほしい．そして低いエネルギー状態を表すベクトルは，この部分空間内に拘束されている，つまり２次元曲面の例でいえば曲面の接平面上にあることを意味している．この接平面は曲面の各点に対して定義されるが，点が動くにつれて変化してゆく．だから曲面上でベクトルが**平行移動**するということは３次元空間で見ると，どんどんとその向きが変化しているのである．この変化を記述するのが，「**接続**」と呼ばれる量で，物理の言葉では「**ゲージ場**」と呼ばれている量が対応する[2]．図１にその例を示した．ベクトルが球面上を「平行移動」してゆくと最初の位置に戻ってきた時に 90° その向きが変化している．この 90° という角度は，経路が囲む立体角に対応，つまり球面の 1/8 になっていることがわかる．

では，幾何学の中でもトポロジーが重要なのは何故だろうか．その答えは「**保存量**」の存在と関係している．物理学では連続対称性が保存則と結びついている[3]．例えば，図２に示すような回転対称性があるとそれに垂直な角運動量の成分が保存する．この保存則は少し

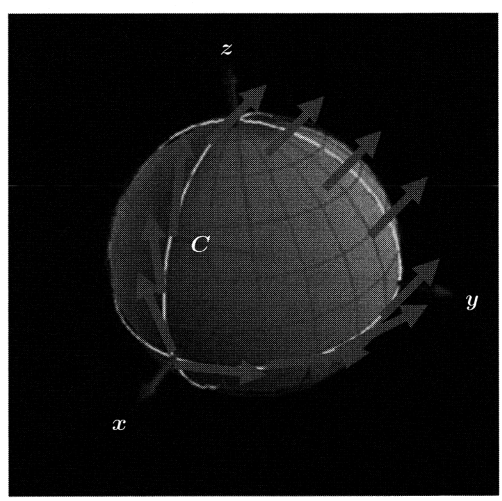


図１　球面上に拘束されたベクトルの平行移動．経路 C に沿って球面上を平行に移動してゆくと，赤道上の元の点に戻ってきたときに 90° の角度だけ変化している．これはちょうど経路 C を囲む立体角に相当する．

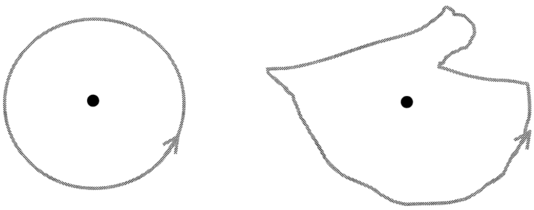


図 2　対称性とトポロジー．左図のように回転対称性があると，対応して角運動量が保存する．一方，原点（黒丸）を経路が横切れないという拘束条件の下で経路が何回巻きついているかというトポロジカル数は，回転対称性とは関係なく一定に保たれる（右図）．

でも回転対称性が破れると破れてしまう「脆弱」なものである．一方で，原点に「杭」が立っていて経路がそれを通過できないという拘束条件があるとすると，この原点を経路が何回回ったかという数—巻付数—が定義される．この巻付数は**トポロジカル数**の一種であり，経路が切れない限りその連続変形に対して不変に保たれる．そして，このトポロジー不変量によって特徴づけられる粒子は，安定に存在することになる．

2. 固体中電子状態におけるトポロジー

第 1 節で述べたやや抽象的な話を，より具体的に固体中の電子状態に即して考えてみよう．

良く知られているように原子核の周期ポテンシャルの下での電子波動関数は**ブロッホ状態**と呼ばれる形を持つ[4)]．

$$\psi_{nk}(r) = \mathrm{e}^{ikr} u_{nk}(r). \tag{1}$$

ここで k は結晶波数，n はバンドを区別する指数，$u_{nk}(r)$ は格子間隔についての周期関数である．対応するエネルギー固有値 ε_{nk} は**エネルギーギャップ**（通常 1 eV のオーダー）で隔てられた，図 3 のような構造を持つ．電子はこのブロッホ状態に詰められるのであるが，ちょうどあるバンドまでがいっぱいになった時には電子はパウリの排他律のために身動きが取れなくなる．これが絶縁体である．一方，中途半端に詰まっている状態が金属に対応する（図 3 の破線で示したのが金属状態で電子が占拠しているブロッホ状態である）．ヒルベルト空間との関係で言うと，各電子はエネルギーギャップを超えた大きなエネルギーが供給されない限り，他のバンドへと遷移することができない．つまり，各バンド n に対応する $\psi_{nk}(r)$ 達の張るヒルベルト部分空間に拘束されることとなる．この部分空間の「曲がり」を記述するのは接続，つまり**ベクトルポテンシャル**

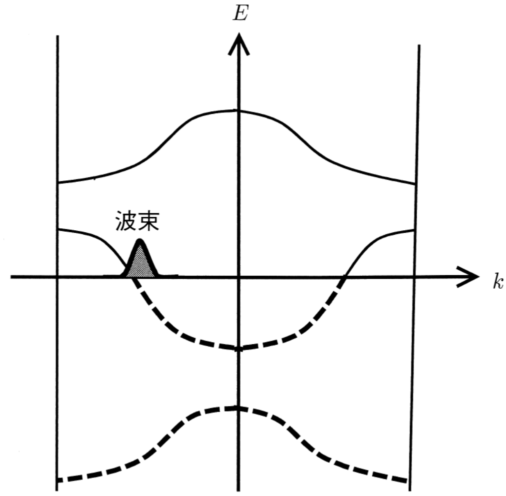


図 3　固体中のブロッホ電子状態．結晶格子の周期ポテンシャルの下で電子状態はエネルギーギャップによって互いに隔てられたバンドに分かれる．それぞれのバンドは結晶波数 k と対応するエネルギーによって特徴づけられる．粒子はこの波動状態の重ね合わせ，つまり波束として構成することができる．エネルギーギャップよりも小さいエネルギースケールの現象を考えている限り電子は，各バンドに対応するヒルベルト部分空間に閉じ込められている．

$$\vec{a}_{nk} = -i\langle u_{nk}|\nabla_k|u_{nk}\rangle \tag{2}$$

である．この量は次のような意味を持つ．今波数空間で近接した 2 つの点 k と $k + \Delta k$ におけるブロッホ波動関数を「比較」する．2 つの状態がどれだけ近いかはそれらの内積を取ってみればよい．

$$\begin{aligned}\langle u_{nk}|u_{nk+\Delta k}\rangle &= \langle u_{nk}|[|u_{nk}\rangle + \Delta k\cdot\nabla_k|u_{nk}\rangle] \\ &= 1 + i\vec{a}_{nk}\cdot\Delta k \approx \mathrm{e}^{i\vec{a}_{nk}\cdot\Delta k}\end{aligned} \tag{3}$$

となり，波動関数の位相因子がどのように移り変わってゆくかを記述していることがわかる[5)]．

量子力学によると波動関数の位相は電子の動きに関係している．この事実は，干渉パターンを変化させると波動を動かせることに対応している．これを見るために**波束**を考えよう．波束とは，運動量 p と位置 r が両方不確定性原理に抵触しない範囲で決まっているような波の状態である．この時 p と r はカノニカル共役変数

であり，例えばその x 成分は $[x,p_x]=i\hbar$ 等の交換関係で結びついている．これは $x=i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}=i\frac{\partial}{\partial k_x}$ と書けることと等価である．ところが，曲がった k 空間では，隣接した k の点の間に非自明な接続が定義されているからこの微分をゲージ共変微分 $x=i\frac{\partial}{\partial k_x}+(a_{nk})_x$ に置き換える必要がある．つまりベクトルの微分は隣り合った2つのベクトルを平行移動したのちに「比較」する操作を含むので，接続が現れるのである．これに対応して，x と y はもはや交換せずに

$$[x,y]=i\frac{\partial(a_{nk})_y}{\partial k_x}-i\frac{\partial(a_{nk})_x}{\partial k_y}=i(b_{nk})_z \quad (4)$$

となる．ここで，「磁場」

$$\vec{b}_{nk}=\nabla_k\times\vec{a}_{nk} \quad (5)$$

を定義した．この時，ハミルトニアン $H=\varepsilon(p)+V(r)$ に対して運動方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{dx}{dt}&=[x,H]=\left[x,\frac{p_x^2}{2m}+V(r)\right]\\ &=i\hbar\frac{p_x}{m}+[x,y]\frac{\partial V(r)}{\partial y}\\ &=i\hbar\left(\frac{p_x}{m}+\frac{(b_{nk})_z}{\hbar}\frac{\partial V(r)}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

となる．これをまとめると

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\vec{p}}{m}+\frac{1}{\hbar}\vec{b}_{nk}\times\vec{F} \quad (7)$$

となる[6]．ここで $\vec{F}=-\nabla V(r)$ は粒子に働く力である．(7) 式の右辺第二項は，異常速度と呼ばれるもので，まさにヒルベルト空間が曲がっていることから生じる電子の速度である．この速度による電子流は，本質的に**非散逸性**である点に大きな特長がある．通常のオームの法則に従う電流は，運動量空間における電子分布の変化によって流れるのであるが，この異常速度を平衡状態の電子分布にわたって積分すると，電場の存在下では有限に残る場合がいくつか存在する．例えば，絶縁体であってもこの機構で電流が流れ得るのである．誘電体における**分極電流**や，**量子ホール電流**がこれに対応するが，現在の発展はもっと広い物質群でこの異常速度が存在して，非散逸の電流が流れるという認識が得られたことである[7]．強磁性体中の**異常ホール電流**[8]を皮切りに，**スピンホール効果のスピン流**[9]，**マグノンのホール効果**[10]，**光のホール効果**[11]，など多くの現象がこの観点から統一的に理解されるようになってきた．さらに進んで，最近ではこの k 空間での曲率を積分して定義される大域的なトポロジー数のもたらす特異な物質群が注目されるようになってきた．これを**トポロジカル絶縁体**と呼ぶ．

3. トポロジカル絶縁体

微分幾何学は図形（多様体）の局所的な接続や曲率を調べるものであるが，これを多様体全域にわたって積分するとその大域的な性質が得られる．**Gauss–Bonnet の定理**がその代表例であり，ガウスの曲率を積分するとその図形の持つ「穴」の数が得られる[2]．この原理を k 空間における波動関数に応用するとどんな帰結が得られるであろうか？ これがトポロジカル電子状態と呼ばれるものに対応する．

まず，歴史的にも最初にこの原理が発見された2次元**量子ホール系**を例にとって説明しよう．第2節で述べた「磁場」$\vec{b}_{nk}$ は z 成分だけを持つが，これを第一ブリュアンゾーンにわたって積分した値がホールコンダクタンス σ_{H} と関係していることが知られている．

$$\sigma_{\mathrm{H}}=\frac{e^2}{2\pi h}\sum_{n:\mathrm{occupied}}\iint d^2k b_{nk}^z=\frac{e^2}{h}N_c. \quad (8)$$

ここで定義した N_c は波動関数の一価性から整数値をとる，**チャーン数**と呼ばれるトポロジカル数である．この公式は，その発見者の名前の頭文字を取って TKNN 公式と呼ばれている[12]．この公式は，ホールコンダクタンス σ_{H} という実験で観測可能な量と，ヒルベルト空間の幾何学的なトポロジカル数を関係づける重要な意味を持つ．つまり，ホールコンダクタンスが普遍定数 e（素電荷）と h（プランク定数）の組み合わせで作った量 $\frac{e^2}{h}$ の整数倍に量子化されることを簡潔に表現しているのである．

この量子ホール効果が，半導体界面の2次元電子系に強磁場を印加した系で観測されていることは良く知られており，既に多くの解説があるのでそちらを参照していただきたい[13]．ここでは，この現象を「**バルク–エッジ対応**」という観点から眺めてみよう．量子ホール効果を示す電子は試料内ではサイクロトロン運動，つまり円軌道を描く回転運動をしている．この軌道が試料の端（エッジ）のところに来ると反射されるために円軌道を閉じることができなくなり，試料端に沿った1次元的な運動をすることになる．これを**カイラルエッジモード**，もしくはカイラルエッジチャンネルという．図4からもわかるように，これは回転運動の「一部」なので方向が決まっており，右のエッジと左のエッ

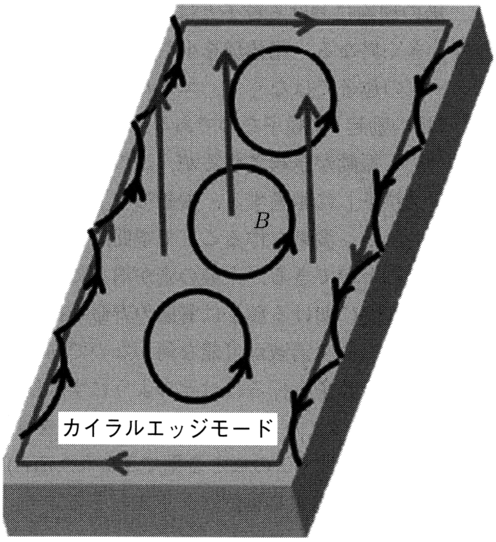


図 4　量子ホール状態の模式図．試料の中では電子は磁場の下でのサイクロトロン円運動を行う．一方，試料端では反射されてこの円運動を閉じることができないために，円運動が直線運動へと変化する．これがエッジモードに対応する．

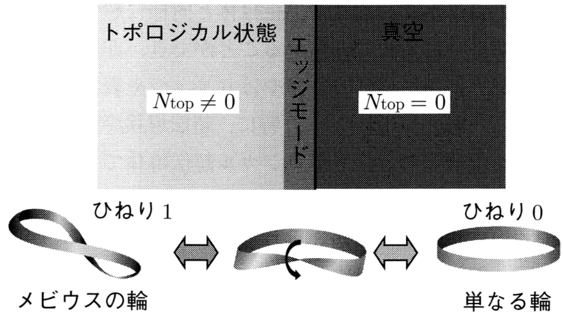


図 5　トポロジカル絶縁体の試料端とエッジモード．トポロジカル数 N_{top} が有限の状態とゼロの真空を繋ぐためには，エネルギーギャップを閉じる必要があり，これがエッジチャンネルに対応する．ちょうど，メビウスの帯を普通のリボンにするためにはリボン幅（これがギャップに相当）をゼロにして自由な回転を使ってひねりを戻すことに対応している．

ジで逆向きとなっている．このように，本来両方の向きを持っていた 1 次元電子系が，2 次元のトポロジカル状態の端に現れると，その自由度が半分となっていることがわかる．これを**電子分裂**と呼んでいる．分裂した電子の最大の特長は，「丈夫」になることである．上の例では，不純物が存在しても「後方散乱」が起こらずに同じ方向に進み続けるということがこれに対応する．向きを変える後方散乱が起きるためには，電子は巨視的な距離離れたもう一方のエッジへと移動する必要があり，その確率は無視できるからである．その結果，この 1 次元チャンネルは完全透過に対応するコンダクタンス $\frac{e^2}{h}$ を持つことになり，これがそのままホールコンダクタンス σ_{H} を与えることとなる．この 1 次元チャンネルをトポロジーの観点から考えてみよう．試料の端は試料の内部と真空の境界である．試料の中では電子状態がトポロジカルに非自明であり，一方の自明な真空状態との境界が試料端（エッジ）ということができる．少し比喩的ではあるが，このことを図形的に考えると，図 5 に示すようにねじりの入ったリボン（メビウスの帯）がねじりの入らないリボンにつながるにはどうすれば良いかという問題と等価である．ここで，リボンの幅はちょうどバンドギャップに対応する．ねじりを解消するためには試料端で幅をゼロにして一点とし，自由に回転できるようにして両者の間を移り変えるのが唯一の方法である．つまりエッジのところでギャップを閉じることがトポロジカルに保障されているのである．このギャップのない電子状態が先に述べたエッジモードに対応し，これを「バルク–エッジ対応」と呼ぶ．以上の考察からこのエッジモードは，バルクのトポロジーによって保護されているので，丈夫であることが理解されるであろう．

このようなトポロジカル状態はギャップの存在を必要としているので，自然に絶縁体を対象としている．そして，上に挙げた量子ホール状態だけでなく，多くの種類のトポロジカル絶縁体が今日では発見されている[14,15]．特に，時間反転対称性を破らない系（磁場や磁化が存在しない通常のバンド絶縁体）でもスピン軌道相互作用の効果で，トポロジカル状態が実現されることが理論的に発見されて以来，爆発的に研究が進展している．このトポロジカル絶縁体は 3 次元でも存在し，その場合には表面にディラックハミルトニアンで記述される電子状態が存在する．上述の電子分裂に対応して，この状態では運動量ごとに一つのスピン成分だけが対応しており，スピントロニクスの格好の舞台を提供している．例えば，表面に磁性不純物を添加すると強磁性状態が実現し，それが**量子化異常ホール効果**をもたらすことが最近発見された[16]．非散逸性の電流がこのような形で表に現れることは，省電力エレクトロニクスの新しい方向性を指し示すものとして大いに注目されている．

さらに，ギャップがある電子状態としては超伝導状

態が思い浮かぶ．そこで，絶縁体と同様に超伝導体もトポロジーによって分類することができ，非自明なトポロジカル超伝導体では，やはりエッジや表面に電子分裂した状態が現れる[17]．特に，超伝導秩序は粒子と正孔を混ぜるので，トポロジカル超伝導体では，自分自身が自分の反粒子と一致する**マヨラナ粒子**がエッジや表面に現れることが知られている．このマヨラナ粒子は，電子分裂に対応してフェルミオンの半分の粒子であり，ほとんど外界と相互作用しない．この性質を利用して量子情報の Qubit への応用が真剣に考えられている．

4. スキルミオン

今までは，k 空間の波動関数の接続という観点からトポロジーの役割を探ってきた．それでは実空間の場合はどうであろうか．この問題に対して，最新の興味深い例が磁性体中に見つかったので，それについて述べることにしよう．これは，**スキルミオン**と呼ばれるスピン構造である[18, 19]．スピンはその方向ベクトルが，単位球面上に拘束されているために（図 1 との類推からもわかるように）幾何学的な性質が現れる格好の舞台を提供しているのである．図 6 に示すように，2 次元空間において強磁性状態のバックグラウンドの中に，スピンが渦状の構造を持ち，中央部では逆向き（つまり $-z$ 方向）を向いているような構造である．このスキルミオンは核物理学で核子の模型として提案された[20]．場の理論における粒子とは，古典的な質点の概念とは大きく異なる．剛体球を小さくした極限のようなイメージの粒子ではなくて，エネルギーと運動量を持った「場の励起」が粒子なのである．ちょうど太鼓の皮をたたくと振動が誘起されるが，この音が場の理論における「粒子」に相当する．振動モードは皮全体に広がっているが，波束を作ることで空間的に局在した粒子を作ることができる．太鼓の音が消えてしまうように，場の理論における粒子は有限の寿命を持つ．つまり，粒子は生成や消滅が可能な何かなのである．それでは，安定な粒子を作るにはどのようにすれば良いであろうか？ ここでトポロジーが重要な働きをする．スキルミオンに即してこのことを見てみよう．$\vec{n}(\vec{r})$ をスピンの方向を記述する単位ベクトルとして

$$N_{\rm sk} = \frac{1}{4\pi} \iint \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \right) d^2\vec{r} \tag{9}$$

という積分は，写像 $\vec{r} \to \vec{n}(\vec{r})$ が単位球面を何回覆うかを数える整数（**スキルミオン数**）を与えることがわかる．図 6 のスキルミオンに対しては $N_{\rm sk} = -1$ となる．このスキルミオン数はスピンの連続的な変形に対しては不変に保たれる（1 節での巻付数を思い出して欲しい）．したがって，スキルミオンという粒子はスピン配置の連続変形によって壊れることはない，つまりこのスキルミオン数というトポロジカル数によって守られているということが言える．この原理は，磁性体においてスキルミオンが安定に存在することを意味し，磁気メモリーへの応用を考える上で大変重要な意義を持つ．スキルミオンのトポロジカルな性質は，こればかりではなく電流との結合を考えた時に顕著な結果を与える．スピンの実空間における接続（ベクトルポテンシャル）は (2) 式との類推からわかるように $\vec{a}(\vec{r}) = -i\langle \chi(\vec{r}) | \nabla_r | \chi(\vec{r}) \rangle$ で定義される．ここで $|\chi(\vec{r})\rangle$ は 2 成分のスピン波動関数である（スピノールと呼んでいる）．詳細は文献 7) に譲るが，このベクトルポテンシャルから作った実空間における「磁場」とスピンの作る立体角の間には次の関係が存在する．

$$\vec{b}(\vec{r}) = \nabla_r \times \vec{a}(\vec{r}) = \vec{n} \cdot \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \right). \tag{10}$$

しかも，この $\vec{a}(\vec{r})$ と電流密度 $\vec{j}(\vec{r})$ との間には，ラグランジアンで書いた結合項

$$\vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}) \tag{11}$$

が存在する．このように磁性体の中にはスピン構造に

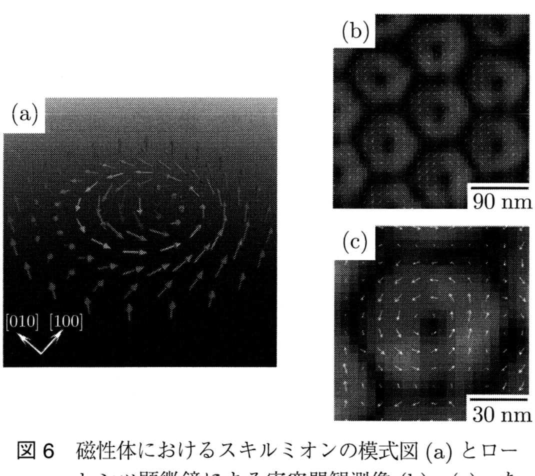


図 6 磁性体におけるスキルミオンの模式図 (a) とローレンツ顕微鏡による実空間観測像 (b)，(c)．ある磁場の強さの範囲では，図 (b) に示すようなスキルミオンの結晶構造が現れる．(c) はその中の一つの拡大図[19]．

由来する「電磁場」が存在しており，これを「**創発電磁場（Emergent Electromagnetic Field）**」と呼んでいる[7]．この (11) 式の結合からいろいろな現象が導き出され，実際に実験で観測されている．

まず，電流によってスピン構造の運動を誘起される．(11) 式を含んだラグランジアンから変分原理によってスピンの運動方程式を導くと

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}+(\vec{j}\cdot\nabla)\vec{n}\\&=-\vec{n}\times\frac{\delta H_{\mathrm{S}}}{\delta\vec{n}}+\vec{n}\times\left[\alpha\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}+\beta(\vec{j}\cdot\nabla)\vec{n}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．ここで H_{S} はスピンハミルトニアンであり，スピンの歳差運動を引き起こす．α は **Gilbert 減衰定数**で，β は**非断熱効果**を表す．この式の左辺の第 2 項が電流による**スピン移送トルク効果**を表し，スピン構造の運動を駆動する．特にスキルミオンの場合には，強磁性体の磁壁などに比べて非常に小さな電流密度での駆動が可能であることが見出されており，応用面からも大きな注目を集めている．一方，伝導電子の側から見ると，スキルミオンは創発磁場 $b_z(\vec{r})$ を伴っているので，ローレンツ力を感じてその軌道が曲げられてホール効果を示すことになる．これを**トポロジカルホール効果**と呼ぶが，実際に多くの物質で観測されている．このように，トポロジカルなスピン構造は，粒子として数々の新奇な特徴を備えており，基礎・応用両面からの活発な研究が行われている．

5. 最後に

以上，トポロジカル物性のいくつかのトピックスにつき簡単に述べてきた．物理学の原理的な問題―トポロジー，保存則，対称性，粒子と波動，など―がそのまま応用へと直結していることも理解していただけたのではないかと思う．巨大な分野に成長しつつあるこのテーマを短い紙面で網羅することは不可能であるが，幾何学という純粋に数学的な学問が，量子力学を通じて現実の現象へと結びつく見事さ・素晴らしさが少しでも伝えられたら筆者の喜びとするところである．

参考文献

1) J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, 1994).
2) 和達三樹，『微分・位相幾何』（岩波書店，1996）.
3) M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, (Addison-Wesley Advanced Book Program, 1995).
4) Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, *Solid State Physics*, (Holt, Rinehart and Winston, 1976).
5) M.V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond.* **A 392**, 45 (1984).
6) Di Xiao, Ming-Che Chang, and QianNiu, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1959 (2010).
7) N. Nagaosa and Y. Tokura, *Phys. Scr.* **T146**, 014020 (2012).
8) N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A.H. MacDonald and N.P. Ong, *Rev. Mod. Phys.* **82** 1539 (2010).
9) S. Murakami, N. Nagaosa and S.C. Zhang, *Science* **301** 134 (2003).
10) Y. Onose *et al.*, *Science* **329** 297 (2010).
11) M. Onoda, S. Murakami and N. Nagaosa, *Phys. Rev. Lett.* **93** 083901 (2004).
12) D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49** 405 (1985).
13) *The Quantum Hall Effect*, 2nd Ed., edited by Richard E. Prange and Steven M. Girvin (Springer-Verlag, New York, 1990).
14) M.Z. Hasan and C.L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045 (2010).
15) X.L. Qi and S.C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057 (2011).
16) C.-Z. Chang *et al.*, *Science* **340** 167 (2013).
17) Yukio Tanaka, Masatoshi Sato, and Naoto Nagaosa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **81** 011013 (2012).
18) S. Mühlbauer *et al.*, *Science* **323** 915–919 (2009).
19) X.Z. Yu *et al.*, *Nature* **465** 901–904 (2010).
20) T.H.R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **31** 556–569 (1962).

（ながおさ・なおと，理化学研究所，東京大学大学院工学系研究科）

ソフトマター物理学とその応用



鈴木 康夫

1. ソフトマター

ソフトマター物理（Soft Matter Physics）は固体物理（Solid State Physics）に拮抗する分野として生まれ，その背景には20世紀に隆盛を極めた固体物理の研究分野を越え，研究対象をもっと広い自然現象に広げようという物理学者の決意があった．

1991年のノーベル物理学賞は「単純な系の秩序現象を研究するために開発された手法が，より複雑な物質，特に液晶や高分子の研究にも一般化され得ることの発見」としてP-G. de Gennesに与えられた．ノーベル賞受賞講演の題名はSoft Matterであり，「近代生物学が生命の簡単なモデルであるバクテリアから研究を開始して多細胞器官の研究に発展したのと同様に，物理学も原子物理学の研究から半世紀を経て高分子，界面活性剤，液晶，コロイドについて研究するソフトマター物理学へと発展した」[1]とある．

ソフトマターの研究対象は柔らかい物質，すなわち，液体，プラスチック，シャボン玉，ゲル，エラストマー，液晶，クリーム，粘土，粉体，生体高分子などが挙げられる．しかし，単純に柔らかい物質を扱うだけではソフトマターの研究とは言えない．単純液体は柔らかい素材であってもソフトマターとは言えないが，液体の界面はシンプルな素材であってもソフトマターである．単なる気体だけではソフトマターと言えないが，気体と液体の両方を含んだエアロゲル（ビールの泡など）は立派なソフトマターである．

ここでは主に高分子を取り上げ，ソフトマター物理学の中心的考え方であるスケーリング則を紹介しながら，生体物質への応用について解説する．

2. 高分子

高分子とは分子量の大きい分子，つまり巨大分子のことである．一般には小さい単位の分子構造（モノマー）が結合（重合）することによって，くりかえし構造（図1）を持ち重合体（ポリマー）とも呼ばれている．衣料に使われている合成繊維（ナイロン，ポリエステル），PETボトルに使われているポリエチレンテレフタラート，核酸（DNA，RNA），たんぱく質（図1）などが高分子である．

こういったひものような構造の物質はこれまで物理学では取り扱われなかった．ニュートン力学は質点の力学から始まり剛体の力学に至って完結するが，そこにはひもの入り込む余地がなかった．ところが，量子力学の発展により，ひも状のものを解析するのに適当なフォーマットである場の理論が登場した．いまでは素粒子理論でも，物質の究極の姿として，ひもや膜が研究されている．

2.1 平均場理論

高分子の中でもフレキシブルで曲がりやすい高分子を鎖状高分子[2]と呼ぶ．高分子には形の自由度があり，溶媒との関係で形を変える．モノマーが溶けにくくモノマーとの親和性の低い溶媒（貧溶媒）の中では，高分子は小さくおりたたまれた状態を取る．モノマーが溶けやすくモノマーとの親和性の高い溶媒（良溶媒）の中では，高分子は広がった配置を取る．この広がった状態を排除体積鎖という．これは良溶媒の中ではモノ

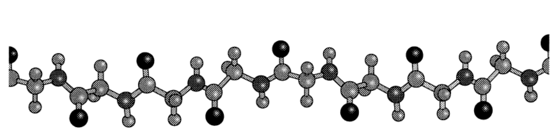


図1 たんぱく質の分子構造．

マーが近くに寄れず互いを排除するという性質を反映している[3]．貧溶媒と良溶媒の中間点に Θ 溶媒（Θ 温度）があり，そこでは高分子は理想鎖として振る舞う．ここではひもが自分自身を自由に横切れ，排除体積効果のない鎖になっている．この状態はある特定の外部条件だけで成り立ち，相転移点のような状態である．

理想鎖の両端を結ぶ長さは大数の法則によりガウス分布になる[2,3]．モノマーの長さを a とすると，Θ 溶媒中の高分子の広がりは重合度を N として

$$R \equiv \sqrt{\langle r^2 \rangle} \cong aN^{1/2} \tag{1}$$

となる[3]．つまり，N の指数を ν とすれば $\nu = 0.5$ である．

これにより理想鎖のエントロピー弾性のエネルギーは，

$$F_{\rm el} \propto \frac{R^2}{Na^2} \tag{2}$$

となる．モノマー間の相互作用を特徴付けるエネルギーを v，高分子内のモノマーの密度を c とおくと，モノマーが互いを退ける排除体積効果のエネルギーは

$$F_{\rm rep} \propto vc^2R^3 \tag{3}$$

となる．高分子の自由エネルギーは両方を合わせて

$$F_{\rm tot} \propto vc^2R^3 + \frac{R^2}{Na^2} \tag{4}$$

となる．広がりが大きくなると第 1 項が大きくなり，広がりが小さくなると第 2 項が大きくなる．自由エネルギーが最小になるように高分子の広がり $R_{\rm F}$ を決める（自己無撞着法）と

$$R_{\rm F} \propto N^{3/5} \tag{5}$$

となり，良溶媒の中では，高分子の長さ（重合度 N）が増すにつれて，0.6 乗で高分子が広がることが予想される．これが**平均場理論**[2,3]である．

この議論では良溶媒中なのに高分子は理想鎖の弾性を持つものとして計算され，排除体積効果の計算ではモノマーの位置の相関（互いに避けようとする効果）が無視されている．平均場理論ではエントロピーの項とエネルギーの項のうち，片方が過大評価され，もう一方が過小評価されるため，誤りが打ち消し合って，実験とそこそこ合う結果が導かれることが多い．

物理量が N^{ν} に比例するという結果はアカデミックなもので実際には役立たないように思える．$\nu = 0.5$ が $\nu = 0.6$ に変わったとしてもその差はわずかに思える．しかし高分子は大きな重合度 N を持っているので，冪のちょっとした差が大きな差を生む．貧溶媒中に比べて良溶媒中の高分子の広がりは 10 倍になり，体積にすると 1000 倍にもなる．これは高分子の中に入り込む溶媒の量が 1000 倍になることを意味する．高分子ネットワークの水分を保持する性質は工業的に利用されているので，この冪の差は実際上とても重要なのである．

2.2 スケーリング則とくりこみ理論

平均場理論はある程度の成功を収めたが，良溶媒中の高分子の広がりは実験結果と少し差があった．良溶媒中の高分子は**ゆらぎ**の大きな系であり，平均場理論は満足のいく解析法ではない．これを克服するために，ゆらぎの大きな系を扱う相転移に関する研究手法が導入された．

しばらくソフトマターから離れて伝統的な物理学で研究されてきた固体について考えてみよう．固体のサイズはその構成要素である原子のサイズよりずっと大きいので，固体の性質を反映する物理量は，構成する原子の数について漸近的な依存性を示す．マクロな大きさの固体を半分にしても，普通その密度や磁性はまったく変化しない．固体は一様で連続な物質ではなく，原子からできているので，どんどん半分にして小さくしていくと，どこかで不連続な現象が出現するだろう[4]．

系を小さく分けていくと，ある**相関長**という長さのところで，性質が大きく変化するようになる．これは系の微細構造のゆらぎが互いに相関している距離である．相関長より距離が離れると，自由度がお互いに関係しなくなる[4]．相関長は温度などの外的条件によって変化するが，通常は原子間隔の数倍程度の長さである．

非常に大きな自由度が複雑に絡み合った系では，自由度間の厳密な関係がわからなくても，系に共通の巨視的な性質が見られる場合がある．系の長さや時間を特徴付けるいくつかの重要な変数に着目し，その変数間に簡単な関係（**スケーリング則**）を仮定すると，様々な系の物理量を普遍的（ユニバーサル）に説明できる．これがスケーリング則と**ユニバーサリティ**（普遍性）である[3,4]．

重要な変数が 1 つの場合には，物理量がその変数の冪で表されるという単純なスケーリング則になる．固体物理学において，2 次の相転移における系の振舞いは系の詳細にはよらず，空間次元，秩序変数の成分数だけによるという普遍性があり，その指数はユニバーサルになる．しかし簡単な有理数ではないことが多い．そこで物理量（磁化）が重要な変数（転移温度 $T_{\rm c}$ からのずれ）の冪に依存すると考えて，そのユニバーサ

ルな臨界指数を研究した．

ソフトマターの話に戻ると，高分子はモノマーの繰返しからできており，その長さはモノマーのサイズよりずっと大きい．高分子の性質を反映する物理量は，モノマーの詳細にはよらずに，モノマーの数（重合度）について漸近的な依存性を示し，重合度の冪で表せる．そこで物理量（高分子の広がりなど）が高分子の重合度の冪に依存すると考えて，その指数を研究する[3)]．

高分子の理論において，転移温度からのずれに対応するものは，重合度の逆数 $\frac{1}{N}$ である．高分子はゆらぎの大きな系であるが，高分子の広がりは相関長程度なので，$R \cong N^{\nu}$ と指数 ν で表される[3)]．平均場理論による ν の値はすべて単純な有理数であった．ところが平均場理論で計算した良溶媒中の ν の値は実験と一致しない．

そこで平均場を越える理論として**くりこみ理論**が考案された．系のサイズを変えたときに系の性質を変化させないためには，系のパラメーターをどのように調整すればよいかを調べる理論である．「系の性質を変化させないようなパラメーターの動きに固定点が現れる」という仮定をおくと，普遍的なスケーリング則を説明できる[3, 4)]．

de Gennes は磁性体の相転移のモデルと高分子の排除体積鎖の広がりとの間の関係に着目し，磁性の $\mathrm{O}(n)$ モデルにおいて磁化を表すオーダーパラメーターの成分 n を 0 にするという仮想的な極限を取ると，排除体積効果を取り入れた高分子の広がりに関するスケーリング則 $R \cong N^{\nu}$ の指数が $\nu = 0.588$ と計算できることを発見した[3, 4)]．これは見事に実験と一致した．

2.3 高分子電解質

電解質を一定の割合で鎖の中に含む高分子は**高分子電解質**と呼ばれ，水溶液中で小さなイオンをたくさん解離する．これらを対イオンという．一方，主鎖のほうは大きな電荷を帯びる．これをマクロイオンと呼ぶ．水溶液中では静電気的エネルギーは熱エネルギーより小さいのでほとんどの対イオンは解離して水溶液中を自由に動き回る．マクロイオンは電荷を帯びたひもである．**生体高分子**には核酸をはじめとしてたくさんの種類の高分子電解質が存在する．

食塩のような小さいイオンになる電解質と異なって，マクロイオンには形の自由度があり，その周囲にはたくさんの対イオンが配置の自由度を持って分布し，それらの間に相関があるため，正確なマクロイオンの形を決めるのは難しい．さらに，対イオン凝縮，電荷反転などの小さい電解質では起きない特異な現象が生じる．

通常電解質は薄めれば薄めるだけ解離するが，希薄溶液中のマクロイオンでは，ある一定以上の対イオンを解離しなくなることがある．これが対イオン凝縮である．

電荷反転というのは，同種類の電荷を持っているはずのマクロイオンが引きつけ合うことである．これはマクロイオンの周りにあるたくさんの対イオンがマクロイオンの電荷を遮蔽するばかりか，マクロイオンをお互いに近づける役割を果たすのであろうと考えられている．

産業への応用としては，多くの対イオンを解離するという高分子電解質の性質を利用して，疎水性の物質に高分子電解質を付与することによって，親水性の物質に変換することなどが挙げられる．対イオン凝縮や電荷反転が起こると，有益な高分子電解質の性質が妨げられるので，これらの現象に関する研究も応用上無視できない．

2.4 高分子ゲル

ゲルは固体と液体の中間のやわらかい物質であり，ソフトマターの代表である．高分子ゲルは，高分子のネットワーク構造の中に溶媒が保持されている．自然界に多く存在する形態であり，生体や食品はほとんど高分子ゲルである．高分子ゲルは外的条件によって体積を大きく変える．これを利用して人工筋肉などが開発されている．特に高分子電解質ゲルは大きな体積変化を示し，溶媒を保持する力が大きく，吸湿剤などに用いられる．

高分子の広がりと同様に，高分子ゲルの体積相転移は高分子の弾性エネルギーと高分子と溶媒の混合の自由エネルギーについての平均場理論[5)]で理解できる．理想鎖の弾性エネルギーは (2) 式で与えられ，ゲルを収縮させ溶媒を追い出そうとする．これを溶液中の高分子と溶媒の体積比 ϕ を使って表すと，

$$\frac{3}{2}\kappa\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{2/3} \qquad (6)$$

となる．κ は高分子の弾性を表すパラメーターであり，ϕ_0 は高分子が理想鎖のときのゲルの体積分率である．一方，ゲルを膨張させ溶媒を吸い込もうとする，高分子と溶媒の混合エントロピーは

$$(1-\phi)\ln(1-\phi) + \chi\phi(1-\phi) \qquad (7)$$

と表せる[5)]．ここで χ は高分子と溶媒の親和性を表すパラメーターである．両者の和を取った自由エネルギーに自己無撞着法を適用すると，

$$\phi + \ln(1-\phi) + \chi\phi^2 + \kappa\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{1/3} = 0 \qquad (8)$$

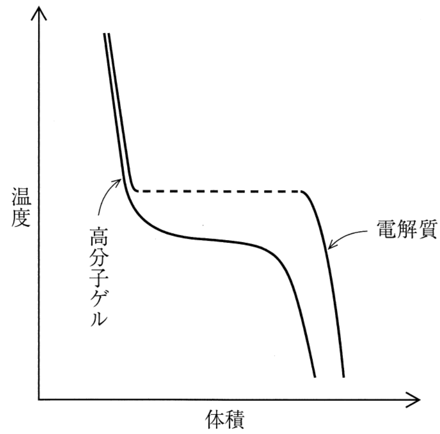


図 2　ゲルの体積相転移を示す状態方程式．

というゲルの状態方程式が得られる[5]．高分子と溶媒の種類を決めると，この方程式は χ の温度依存性と体積分率 ϕ の関係を与え，ゲルの温度と体積の関係が図 2 のように定まる．

温度などの外的条件を変化させると液体が気化して体積が増すのと同様に，状態方程式にしたがって，ゲルの体積が大きく変化する．これは貧溶媒領域において $\nu = 1/3$ であった高分子鎖の広がりが，臨界点（Θ 温度）で理想鎖の $\nu = 1/2$ を示し，良溶媒領域において $\nu = 0.588$ になることに対応している．ゲルは高分子ネットワークの中に多量の良溶媒を保持するのである．

コンクリートを作る過程で細かい砂を水に混ぜるが，そのときに液体の水と混ぜるよりも多量の水を含んだ高分子ゲルと混合させるほうがダマにならず，最終的により早く均質に水を行き渡らせることができる．さらに，でき上がったコンクリート表面を，多量の水を含んだ高分子ゲルで覆うことにより，水分の損失を防ぎ，ひび割れなどを防止することにも使われている．

生物学の研究においてはゲルクロマトグラフィーがよく使用される．これはゲルの中に溶液を通すことによって，高分子との相互作用により溶液内の物質を分別する装置である．

3. 界面

高分子はひもという 1 次元のオブジェクトであったが，2 種類の異なる相の間を占める 2 次元のオブジェクトが**界面**（膜）である．界面もひもと同様にいままでの物理学では扱われなかった物質形態であったが，ソフトマターの対象としてひもと同じように平均場理論，スケーリング則，くりこみ理論といった手法で研究されるようになった．いまでは高エネルギー物理学でもひもと同様に膜（brane）も物質の究極の姿の一つとして研究されている．

3.1 液体界面（膜）

液体の持つイメージとして，まっさきに心に浮かぶのは液体の表面だろう．液体の性質だと思っていることのほとんどが液面の性質であることを意味している[7]．高分子をフレキシブルなひもでモデル化したように，液体界面をゆらぐ膜としてモデル化する．高分子のときと同様に状態変数が変化したときに膜がどのような広がりを見せるかを平均場理論で調べることができる．膜のおりたたみの自由度（エントロピー）と膜がお互いに通り抜けられないエネルギー（排除体積エネルギー）の和について自己無撞着法を適用する．また，くりこみ理論によって，外部条件が変化したときに，膜がフラットに広がったり，くしゃくしゃにまるまったりする相転移などが研究された．さらに，熱運動によってゆらいでいる 2 つの膜が近づくと膜のゆらぎが膜の間に反発的な相互作用を生み出す[6]ことがわかった．

溶液中の高分子が示す特質は，高分子が溶液の界面に及ぼす作用である．特に界面活性剤は液体の界面に移動し，界面の物理に大きな影響を及ぼし，液面の性質を制御する目的で，洗剤，化粧品，潤滑油，などの液体に使われている[6]．界面活性剤の一種である脂質分子は，溶液中で自発的に界面を作り出し，様々な形の構造体を形成する．

4. 固体界面（コロイド）

液体の中に固体粒子（**コロイド**）が分散したものをコロイド溶液[7]と呼ぶ．ペンキやインク，エンジンオイルの添加物，写真フィルムの感光粒子，などにコロイド溶液が見られる．コロイドは食品や生命現象においても重要な働きをしている．高分子にとってコロイドは大きな物体であり，固体の界面とみなされる．固体粒子の代わりに液体や気体のドロップレット（液滴や泡）が分散しているエマルジョンもソフトマター物理学の研究対象である．マヨネーズなどがその例である．

一般にコロイドは凝集する傾向があり，大きなコロイドを溶液中で分散させるのは難しい．安定な分散状態を維持するために，高分子電解質をコロイド表面に植え付けることが有効である．高分子電解質を疎水性コロイドの表面に植え込むと親水性コロイドに変化し，

水溶液中で安定に分散させることができる．これにより揮発性溶媒にしか溶けなかったコロイドを水溶性に変化させることにより，環境にやさしい水溶性ペイントを開発することができる．

コロイド間の相互作用は溶媒のわずかな変化で斥力になったり引力になったりする．コロイド溶液に高分子や界面活性剤を含ませることにより，この相互作用を制御することができる．それによってコロイドは凝集したり，沈殿したりするので，溶媒のわずかな変化を感知する．その性質は抗原を感知する妊娠検査などに使われる．

自然界で固体界面を高分子で装飾することによって物性を制御している例としては，イルカの肌である．イルカが少ない抵抗で水中を泳げるのは，身体の表面から高分子を出し，表面付近の流体の境界条件や渦の生成をコントロールしているためではないかと考えられている．

5. 生体物質

ここでは生体物質をソフトマター物理学の観点から考えてみよう．複雑な系は往々にして一様な状態にならず，内部に構造が現れることがある．複数成分の溶液が相分離を起こすと，液体の間に界面が生じる．通常は巨視的な界面ができるが，微小な構造体が形成されることもある．

水と油の系にさらに第3の物質，界面活性剤である脂質を加えると，脂質は溶液中で様々な形に会合し，分子集合体を自発的に形成する（図3）．脂質は両親媒性分子であり，一つの分子の中に液体に溶けやすい部分と溶けにくい部分を持っている（図3）．一つの溶媒が脂質にとって同時に良溶媒と貧溶媒の性質を持つことになる．脂質などの両親溶媒性の界面活性剤を溶媒の中に入れると球状ミセル，棒状ミセル，ヘキサゴナル構造，ラメラ構造，ベシクル，脂質二重層，スポンジ構造など様々な構造が自発的に生じる（図3）．生体組織にはこのような界面構造があり，生体機能の上で重要な役割を担っている．

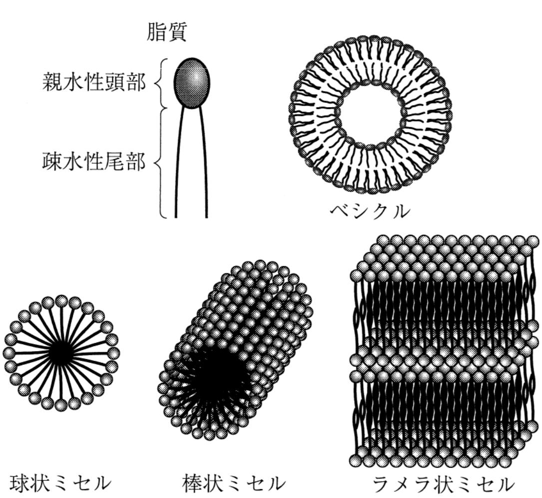


図3　水，油，脂質が織り成す様々な構造．

5.1 生体高分子

たんぱく質はアミノ酸がペプチド結合により重合している高分子（図1）であり，ポリペプチドとも言われる．たんぱく質は生体内で特定の立体構造を取ることによって生体機能を発現している．ひも状の高分子が特定の形におりたたまれることによって，生体機能にふさわしい構造を取る．高分子がどのような仕組みで決まった構造を取るか，一本の鎖の中のアミノ酸配列がどのようにたんぱく質の立体構造を決めているのかなどを研究するのがおりたたみ問題である．

DNAやRNAは核酸と呼ばれる高分子であり，遺伝情報を伝える生体物質である．DNAは普段は2本の鎖がペアになって二重螺旋構造を取っており普段はたんぱく質とともにコンパクトにおりたたまれていて，染色体となっている．機能を発現するときに立体構造を変化させることもある．電荷線密度の大きい高分子電解質なので，対イオン分布と高分子の形状の相関や対イオン凝縮現象などが研究課題になる．

5.2 生体膜

細胞膜は脂質二重膜からなり，その中には，たんぱく質が浮かんでいて，さらに膜の表面には糖鎖が生えている（図4）．わたしたちの身体はこのような膜に包まれた細胞でできている．細胞膜からブラシ状に生えている糖鎖にはいくつかの種類があるが，それはヒトごとに違っていて，それが血液型を決めている．血液型を調べるためには血液中の細胞の凝集反応を利用する．

細胞膜である脂質二重膜では脂質が液晶状態になっており，その液晶状態の膜の中でたんぱく質は拡散運動をして生体機能を発現している．**生体膜**の構造や物性は生体機能発現と密接な関係があり，細胞膜は機能性に富む界面活性物質と高分子電解質の分子集合体と言える．細胞内部にも様々な膜構造があり，細胞の生体機能は，膜構造の内外の溶液中でも，また膜そのものでも担われている．

ソフトマター物理学では，脂質二重膜の広がりにつ

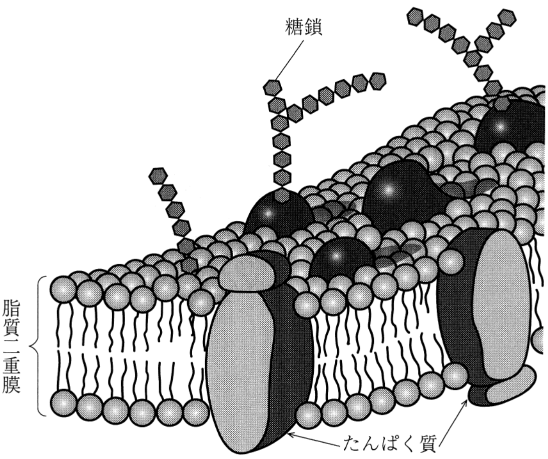


図4　細胞膜の構造.

いて，膜のゆらぎが外部条件によってどのように変化するか研究された．赤血球の病気である鎌形赤血球症は，外部条件の変化で脂質二重膜のゆらぎが発達した結果，赤血球の形が変形し，生体機能に異変が起こっているのではないかと考えられている．ゆらぎが大きくならない条件を研究することにより，鎌形赤血球症を予防したり治療することができるかもしれない．また，細菌の生体膜へ影響力の強い界面活性剤や高分子を利用して，抗菌作用を持つ素材も開発されている．

6. 医療や産業への応用

身体の特定な場所に薬を運ぶことをドラッグデリバリーというが，ゲルの保水性や親和性を利用したドラッグデリバリーシステムが研究されている．

ヒトの目のレンズである水晶体はたんぱく質の塊のようなソフトマターである．白内障は，臨界ゆらぎによって相関長が無限大になるために起こる白濁ではないかとの立場から物理学的研究が行われている．

腎臓は生物学の実験で使われるゲルクロマトグラフィーのような濾過機能を持っており，血液が高分子弾性体の中を流れているという観点からも研究されている．

生体は膜構造からできており，人工的な物質と膜との相互作用により拒絶反応を示すことがある．たとえば血管を広げて保持するステントという医療器具があるが，材質によっては拒絶反応を起こし，使用できないことがある．そこで医療機器の表面に拒絶反応を抑制するような高分子を付けることにより改善することができる．

医療以外の産業への応用としては食品科学がある．食品はほとんどすべてが高分子ゲルであるので，その製造過程でソフトマター物理学が貢献している．ヨーグルトなどはまさにゲルが水分を保持している食品であり，どうしたら長期間保水力を保てるかなどが研究課題である．

ゲルの水分保持能力を利用した工業製品には吸湿剤や紙おむつがある．紙おむつと呼ばれているが，その実態は中に入っている高分子電解質ゲルが多量の水分を吸収するゲルおむつである．

7. おわりに

物事をシンプルに考える物理学の方法論は，自然界のあらゆる現象の理解において，強力な武器である．固体物理学における量子力学や相転移などのアカデミックな研究が，半導体や磁性体に応用され，役に立つ工業製品として身の回りに存在することは今日当たり前のことである．同じようにソフトマター物理学の成果も日常生活の中にあふれている．

ここで見てきたように，1次元や2次元の物体が，長さや面積の増加につれて，どのように広がるかというアカデミックな疑問が，吸水ゲルの開発や医療への応用につながったことや，あるいは日常生活にはまったく縁がないと思われていた相対性理論がGPSの普及によって日常生活になくてはならない理論になった最近の事情などを考えると，現在研究中で研究者の間でも合意ができていないような理論（例えば超対称性ひも理論）でも近い将来役に立つ応用開発につながるかもしれないと思えてくる．役に立たない物理学というのはほとんど考えられない時代になってきている．

参考文献

1) http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1991/gennes-lecture.pdf
2) Paul J. Flory, *Statistical Mechanics of Chain Molecules*, Interscience Publishers (1969).
3) P-G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell Univ. (1979).
4) John Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*, Cambridge Univ. (1996).
5) 土井正男，小貫明『高分子物理・相転移ダイナミクス』岩波書店（1992）.
6) Samuel A. Safran, *Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces, and Membranes*, Addison-Wesley (1994).
7) T. Witten, P. Pincus, *Structured Fluids*, Oxford Univ. (2004).

（すずき・やすお，拓殖大学工学部）

科学的発見から技術的応用までの過程

核分裂発見から原爆開発までを事例として

橋本　毅彦

やや不適切な例かもしれないが，科学的発見から技術的応用までの過程をはっきりと見せてくれる歴史事例として，原爆開発の過程を取り上げて検討を加えていくことにしたい．原爆開発のきっかけは，1938年末のウランの核分裂の発見，そして発見を応用した技術が実現したのは1945年における原子爆弾の完成である．その期間，6年ほどである．その6年の過程をもう少し詳しくたどってみよう．

ウラン原子の核分裂がドイツのオットー・ハーンによって発見されたのは，1938年のこと．だが彼が実際に発見したのは，ウランに中性子を照射するとバリウム原子が検出されるという現象だった．すでにスウェーデンに亡命していたリーゼ・マイトナーにこのことを報告すると，マイトナーはそれは核分裂が起こったのだと正確に解釈してくれた．科学的発見とは，ハーンが新現象に気づいた時点に起こったのか，マイトナーが正しい解釈をした時点で起こったのか．よく考えると，発見とは何かというやや難しい哲学的問題がここにはひそんでいる．ともあれ核分裂が1938年末までに発見された．

その後，原爆開発がなされるまでに起こったことをおさらいしておく．1939年に連鎖反応の可能性が発見され，原爆の実現可能性が高まった．同年，アインシュタインが大統領に書簡を送り，原爆開発のための研究を進言した．一方同じ頃イギリスでは，オットー・フリッシュとルドルフ・パイエルスがウラン235だけだと臨界量が数kgから数十kg程度になるということを見積もった．その見積もりが正式な報告として米国に届くのが1941年のこと．マンハッタン計画が開始されるのは，翌1942年10月のことである．

マンハッタン計画では，純粋なウラン235を抽出するためにウラン濃縮の作業が極めて大規模に進められるとともに，ウランから人工的な元素プルトニウムを生成する作業も進められた．天然ウランにはわずかにしか含まれていないウラン235を抽出し濃縮するために，オークリッジに大規模な工場が建設され，またこの巨大施設を使っても作業完了までに長時間を要した．

一方，プルトニウムについては十分な量が確保できたが，爆弾にするためには新たな技術開発が必要であることが気づかれた．爆縮という爆破装置を製作することが必要となり，そのためにはいくつかの発火装置を正確に同時に発火させる機構を開発せねばならなかった．ロスアラモス研究所でこのような装置が開発され，プルトニウム型爆弾が完成した．1945年7月に最初の原爆実験で利用されたのはそのようなプルトニウム型爆弾だった．ウラン型爆弾はその時点で一つしか完成されず，それは広島で投下されたのである．長崎には，

もう一つ製作されていたプルトニウム型爆弾が投下された．

以上が，ウランの核分裂の発見から原爆が完成し使用されるまでの過程の概略である．その事例から，科学的発見から技術的応用までの過程についてどのようなことが言えるだろうか．

第一に，科学的発見という出発点と技術的応用という到着点を確定することは，容易でないことが多いということである．原爆開発は比較的それら二つの時点を確定することは容易な例である．だが，よく見ると，ウラン核分裂の発見はいつなされたのか，プルトニウム型爆弾を利用した最初の原爆実験を技術的応用の時点にしていいのか，そもそも出発点は放射能の発見の時点に遡ることもできるのではないか，などの疑問がわいてくる．

第二に，科学的発見が実用技術に仕立て上げられるまでには，多くの新しい発見や発明が必要とされるということである．核分裂の発見から現実的な原爆開発計画が着手されるまでには，ウラン濃縮というアイデアが必要であり，より具体的には純粋なウラン 235 の臨界量の理論的見積もりが必要であった．その見積もりは困難な科学的問題であり，その作業に取り組み，解決し，意外な答えに達したことは一つの科学的発見であった．

また原爆開発の過程では，ウランだけでなくプルトニウムの生成も新たな科学的成果として追求され，それを利用した爆弾が作り出された．しかしプルトニウム型爆弾を製造するためには，高度な技術を利用した装置が必要であることが判明した．装置の開発には，専門技術者による新たな発明も利用された．それはロスアラモスの技術者によって短時間に解決されたが，思わぬ技術上の問題に逢着し，問題解決にてこずり多くの時間を費やしてしまう可能性もあった．

科学的発見が実験室内での新現象の発見である場合，しばしばその技術的応用とは工場での製品量産，すなわち実験レベルの現象をスケールアップすることに技術応用の課題は帰着する．実験室でのウラン核分裂を核爆発にまでスケールアップすることは単純な作業ではなく，多大な資源が投入される困難な作業だった．原爆開発の事例を見ると，その過程は単純なスケールアップとして見なされる単線的なプロセスではなかったことを見て取れる．ウラン濃縮の作業を進めつつも，プルトニウムを新たに生成し爆弾の燃料とする道もたどられることになった．一つの開発が進められる過程で，もう一つの路線も見いだされ，二つの計画が複線的に進められることになったのである．結局最初に爆発したのは第二の路線で開発されたプルトニウム型爆弾だった．このような技術開発における複線性，そのことを第三の論点として指摘できよう．

そして第四に，この事例は国家が非常時に全力で取り組んだプロジェクトであり，資金と資源の利用については極めて例外的な事例だったことである．逆に，通常の事例であれば，これほど大量の物的資源，優秀な人的資源を自由に利用することは不可能である．そのような資源利用の自由度に依存し，応用技術実現までの時間は大きく左右されることになる．

これらのさまざまな要因が，科学的発見から技術的応用までのプロセスを複雑で予測困難なものにしている．その間にかかる時間は，それらさまざまな要因と，過程で逢着する技術的課題の難度に依存することになる．発見の直後に実用に付される場合もあれば，数年あるいは数十年費やされて技術に応用され製品が実現する場合もある．だが，それに費やす時間は以前に比べ短くなってきているといえよう．新技術の開発に必要とされる補助的な技術，そのような補助技術の候補となる利用可能な技術が 19 世紀，戦前に比して格段に増大しているからである．

（はしもと・たけひこ，東京大学大学院総合文化研究科）

導電性高分子の発見と開発

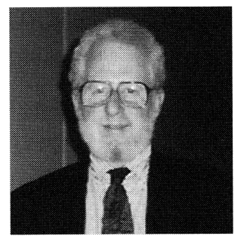


鈴木　康夫

1. Alan Heeger

導電性高分子に関する研究の急激な発展は，Alan Heeger の発表した「1 次元有機化合物が超伝導転移を起こした」という報告から始まりました．超伝導を引き起こす原因は，フォノンと電子の相互作用にあることが John Bardeen, Leon Cooper, Robert Schrieffer（1972 年ノーベル物理学賞）の研究によって知られていました．そこで，フォノンと電子の相互作用の大きい有機化合物は，たとえ常温では導電性が低くても，超伝導を起こす候補にふさわしいというアイデアに基づいた研究です．この論文の結論は間違いで，追試によって超伝導転移ではなかったことが判明しました．しかし，この論文をきっかけに，有機化合物の電気的性質が多くの研究者の興味を惹きつけ，この分野の研究が一挙に盛んになり，これが導電性高分子の発見につながりました．

その後，Alan Heeger は 300 を超える[*1)]導電性高分子の研究論文を発表し，導電性高分子科学の基礎を築きました．既存企業の研究者と共同研究をするばかりでなく，自らもベンチャー企業を立ち上げ，高分子による発光ダイオードやトランジスターの応用開発にも主導的役割を果たしました．



Alan Heeger.

2000 年には，Alan MacDiarmid，白川英樹とともに「導電性高分子の発見と開発」への貢献によりノーベル化学賞を受賞しました．

受賞直後，Alan Heeger が私のインタビューに答えた内容[1)]の一部を次節に紹介します．

2. 科学的発見から応用開発へ

科学の進歩には長い時間がかかるので，科学のブレイクスルーを予測することは困難です．新しい研究を始めるとき，たしかに科学的成果が社会に与えるインパクト（応用）を想像して研究の動機にすることもあるでしょう．しかし，一般的には，新しい科学的発見をきっかけに，研究が進展し，新しい科学的基礎が出現して初めて，それが応用開発の基盤になります．それまでは科学的成果の社会に与えるインパクトを評価することはたいへん難しい問題です．

科学の発見と応用開発は同列には扱えません．科学という基礎があって，はじめて応用開発ができるのです．何か発明をしたいと思ったら，まず

*1)　ノーベル賞受賞直後に，UCSB のウェッブページに公開された論文リストの中から，導電性高分子に関するものに限って，私が数えた論文数です．現在，UCSB のウェッブページによれば，彼の発表した総論文数は 800 を超えているそうです．

科学的知識を集めることから始めます．科学的知識をもとに応用を考案します．科学的基礎が確立していないと応用開発は不可能です．発明の動機には社会へのインパクトというものが大きなウェイトを占めていると思います．一方，科学研究の動機はもっと根源的なことに関係しているように思います．具体的に例をあげて説明しましょう．

1970年代初頭に有機物の研究を始めました．分子を積み上げて長い筒状にしたとき，電子はこの筒に沿って動くだろうか，そのとき電気的性質はどうなるのだろうか，という疑問が研究の動機でした．

つまり最初の研究テーマは1次元物質の物理学という非常に特殊で専門的なものでした．その後，研究が発展していくと，もっと一般的に，同じ分子構造が周期的に繰り返されている1次元状の高分子，すなわちプラスチックの電気的性質に興味が湧いてきました．

そのときプラスチックはすでに社会で重要な役割を果たしている物質でした．しかしそれ以前の研究は，おもにプラスチックの構造や機械的な性質に関するものばかりでした．新しいテーマに基づいた研究の結果，プラスチックに新しい種類の性質を導入することに成功しました．光学的性質や電気的性質をプラスチックに付け加えることに成功したのです．つまり，1次元物質の物理学という非常に特殊で専門的な研究から始まって，いつの間にかそれが，高分子による発光ダイオードやトランジスタという私たちの日常生活を大きく変えるような応用開発に結びついたのです．これはとてもすばらしい経験でした．

科学的研究がどのような応用に結びつくのかはなかなか予測がつきません．いまの例では，科学的研究をしているうちに，気づいたら基礎研究がいつの間にか役に立つ応用開発に結びついたのです．新しい性質を持った新しい種類のプラスチックに関して研究を進めていって，やっと基本的理解の糸口をつかんだと思った瞬間，そこはすでに新しい応用開発の入口だったというわけです．この科学的成果をもとに発光ダイオードやトランジスタを高分子で作るという応用開発が始まりました．このプロセスはいまだに続いていて，有機EL液晶パネルやポリマーバッテリーが身の回りに出現し始めています．

3. 自然の理解と社会への貢献

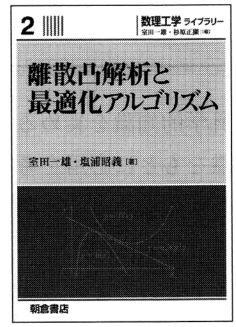
以上，インタビュー[1)]の一部を私なりの解釈を加えて紹介しました．科学者の研究動機は，私たちの周りにある自然をもっとよく理解したいというところにあると思います．一般に想像されるような地位や名声を欲して研究している人はあまり見られません．業績をあげるためにモラルハザードが起こって，データが改ざんされたり，でっち上げが起こることがないとは言えませんが，社会の他の分野よりは少ないと思います．Alan Heegerが指摘するように，自分の研究，すなわち自然を理解することがどのような応用につながるかについて研究を始める前から想像することはほとんど不可能です．彼はまた，新しい研究に接するといつも，自分はどのようにその研究に貢献できるかを考えながら話を聞くとも語っています．科学者は，科学とその成果が社会に貢献できることを信じています．中世の封建制社会では騎士や武士は君主にどのような貢献ができるかが問われました．21世紀の現代では，科学者だけでなく，すべての人が，自分の仕事などを通して，社会にどのような貢献ができるかを考えながら生きていくべきだと思います．その中でも特に科学では自分の研究が論文を通して世界に公表され，発明や応用への基礎を与えることで社会に貢献できるというわかりやすい構造を持っています．科学者はわかりやすく魅力的な職業だと思います．

参考文献

1) リメディアル☆フィジックス DVD-ROM 全4巻 Disc2「電子・原子」丸善 (2004).

（すずき・やすお，拓殖大学工学部）

離散凸解析と最適化アルゴリズム



室田一雄・塩浦昭義共著，A5 判，224 頁，本体 3700 円，朝倉書店

アルゴリズム設計というものは技芸の域を超えず，天才的なひらめきが必要である，と思っている方は多いかもしれない．それが正しいと思える事例が多く存在することは確かであるが，数理最適化における趣きは大きく異なる．その学問分野が発展させてきた理論に基づくと，効率よく解ける最適化問題の背後には凸性という数理構造があり，凸性から導かれる双対性と最適性条件という重要な概念がアルゴリズム設計の指針となっているのである．これは凸解析を基盤とするが，そこで議論されるのは専ら連続最適化問題であった．それに対して，離散凸解析は，連続最適化問題に対する凸解析を離散最適化問題に対して展開する．また，目的関数を線形関数とする離散最適化問題だけではなく，それを（性質のよい）凸関数とする離散最適化問題も離散凸解析の射程にある．

『離散凸解析と最適化アルゴリズム』は，効率よく解ける離散最適化問題に関してよく議論される話題から始め，それを下敷きにして離散凸解析の一般論を紹介するという構成を取っている．

第 I 部では，離散最適化に関する既存の教科書と同様に，最小木問題や最短路問題といった典型的な問題を解説する．と思って読み進めていると，最小凸費用テンション問題や資源配分問題のように既存の教科書であまり扱われていない題材が登場する．この辺りに，目的関数を線形関数に限らない凸最適化が姿を現す．重要な点は，それぞれの問題に対して，まず効率よいアルゴリズムを設計するための指針となる性質，すなわち，数理構造の紹介があり，次に，その性質を基盤として設計されるアルゴリズムの紹介がある，という流れを貫き，それにより，「数理構造」と「アルゴリズム」の対応を読者に対して鮮明に印象付けていることである．これに呼応するように第 II 部と第 III 部が展開していく．

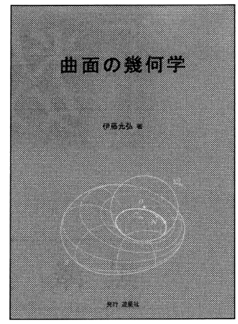
第 II 部では，離散凸解析の重要概念を 1 変数の場合から始めて，短く紹介している．そして，第 I 部で登場した問題の背後に存在する数理構造が離散凸解析の概念とどのように関わるのか，説明される．つまり，第 I 部で紹介された「数理構造」が離散凸解析の視点から論じられるのである．特に，離散凸解析における双対性と最適性条件もここで紹介される．この第 II 部では，多くの定理の証明が省略されているので，一部の読者は数学的に物足りなく感じるかと思われるが，その場合は，室田氏による『離散凸解析』（共立出版）などを参照して補えばよい．

第 III 部では，離散凸解析におけるアルゴリズムを，これも 1 変数の場合から始めて紹介している．ここでは，第 I 部で登場したアルゴリズムが離散凸解析におけるアルゴリズムとして一般化される様子が描き出される．つまり，第 I 部で紹介された「アルゴリズム」が離散凸解析の視点から論じられるのである．離散凸解析のような抽象的な枠組におけるアルゴリズムの理解も，第 I 部の導入によって助けられる．また，効率性向上技法としてスケーリングや連続緩和も紹介されている．これらの技法を適用する際にも数理構造の考察が必要であり，その点に本書は抜かりがない．

序文には本書の目的が 2 つ書かれている．その 1 つは「離散最適化問題の具体例について基礎的な事柄を平易に解説し，それを通じて離散凸解析の全体像を説明する」ことであり，もう 1 つは「離散凸解析の視点から離散最適化問題を眺めることにより，既知の結果に対する理解を深めるとともに，新たな発見を導く」ことである．第 1 の目的に書かれている「平易性」はとても厄介である．なぜなら，それは主観に基づくからである．私自身が，難解でどうにも手が付けられない，と本書に対して感じた箇所はなかったが，それだから平易であるとは言い切れない．既存の書籍の中には，図表を多く用いて解説しているものもあり，それらの方が平易であると感じる．しかし，平易でないとしても強調したいことは，本書の視点であり，それは第一に数理構造とアルゴリズムの対応であり，これは最適化アルゴリズムの設計において明確に意識されなくてはならない．そして，第二に，その対応を離散凸解析という抽象的枠組で捉え直し，更なる高みを臨もうとする意識である．アルゴリズム設計という技芸を昇華し，到達した極致の一端を本書は見せてくれる．

岡本 吉央（電気通信大学大学院情報理工学研究科）

曲面の幾何学



伊藤光弘著，A5 判，192 頁，本体 2400 円，遊星社

よく読むと，専門家が読んでも奥の深い内容がちりばめられているにもかかわらず，山吹色の表紙に，白地で本書で扱われるサイクライドの絵が描かれ，ページをめくると，曲面などの図が豊富で，本の厚さも薄く，とっつきやすい本，というのが本書の第一印象である．本書は 4 つの章からなる．第 1 章は，曲面の定義から始まり，通常の入門書とほぼ同じ内容であるが，第 2 章から，本書は，他書にない「主方向と主曲率」，「反転」などに焦点をあてていく．

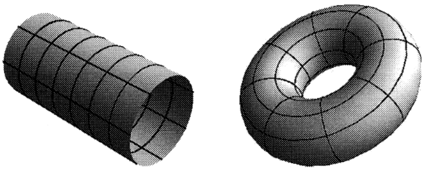


図 1　直円柱と回転トーラスの曲率線.

曲面においてすべての方向に曲がり方が同じになる点を臍点というが，臍点以外の点では，曲面が最も強く曲がっている方向，あるいは最も弱く曲がっている方向として「主方向」が定義される．二つの主方向は互いに直交する．曲面上の曲線で，その接ベクトルが主方向を指し示す曲線のことを曲率線という．図 1 は，直円柱と回転トーラス（ドーナッツ型）の曲率線を描いたもので，円柱の場合は一番強く曲がっている方向の曲率線が円であり，それに直交する直線が一番弱く曲がっている方向を与えている．

曲面の二つの主方向の法曲率を「主曲率」という．さらに，この二つの主曲率の積のことをガウス曲率という．曲面論には奥の深いテーマが二つある．一つは，ガウス曲率の積分に関する「ガウス・ボンネの定理」であり，もう一つは曲率線に関する事柄である．大抵の入門書では，前者は扱うが，後者には通常ほとんど触れない．本書は，後者についての貴重な解説がなされているだけでなく，第 4 章においてガウス・ボンネの定理についても明解な説明がなされ，フーコーの振り子の数理に結びつけるなど他書にない幾何学的直観を重視した工夫がされている．

さて，第 2 章は，曲率線をテーマとしている．正則曲面で，その上の曲率線がすべて円あるいは直線となる曲面をサイクライドという．図 1 の直円柱と回転トーラスは，その代表例になっている．本書は曲面を数式ではなく図形を通して理解させることを主眼としており，曲率線を幾何学的に理解する手段として「ヨアヒムスタールの定理」と「ボンネの定理」を紹介している．特に，ヨアヒムスタールの定理は，上述のサイクライドの性質を調べる上で重要な役割を果たすが，恥ずかしながら筆者は，この定理を本書で初めて学んだ．

第 3 章は，平面および空間における「反転」をテーマにしている．基本的な事項からエッシャーのタイリング，双曲直線・双曲円の作図法，ソディーの 6 連球連鎖定理などにも触れ，大変興味深い内容となっている．一見すると第 2 章とまったく異なる題材に見えるが，実は後半で，空間反転が，曲面の曲率線を不変にするだけでなく，サイクライドをそれ自身に写すことが明らかになる．直円柱，直円錐，回転トーラスはサイクライドの例であるが，すべてのサイクライドはこの三つの曲面の反転として得られる．

本書は，著者が冒頭で述べているように，曲面論の入門書というよりは，一度勉強した人の再入門という位置づけにある．筆者が若い頃勉強した『微分幾何学とゲージ理論』は自己双対接続のモジュライ空間など当時の最先端の研究を伝える名著であるが，この本は同じ著者の本であるにもかかわらず「具体的なもの」，「直観的な理解」に重きをおいた書物となっている．本書の序文にもあるように，数学には抽象化の流れと，具体化の流れという二つの正反対の方向がある．若い方は概して，最先端の抽象的な話題に興味をもつ傾向があるが，本書のような本を通してもう一つの流れに接するのは大変有意義なことだと思う．

本書を読みこなすには，予備知識はそれほど必要ではないが，自分で問題を解いたり，文献を調べたりする必要がある．本書の末尾には解答の概略や文献案内が記されており，学部 4 年生から大学院生が読む本として是非おすすめしたい本である．

梅原　雅顕（東京工業大学大学院情報理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

黒澤 良和

1984年2月号

19世紀末の北里柴三郎による破傷風菌抗毒素の発見以来，抗体は多くの研究者による興味の対象であり続けた．最後の疑問“抗体分子の多様性獲得機構”も1970年代の組換えDNA技術の革命的進展の中でほぼ完璧に解明され，1987年利根川進博士のノーベル医学生理学賞受賞に結実した．現在，抗体は様々な分子を特異的に同定する試薬，さらに癌やリウマチの治療薬として広く使われているが，学問的な解析対象としての役割は終えた感がある．1990年代に“ファージ抗体ライブラリー作製技術”が開発され状況は大きく変わると思われたが，あまり利用されていない．この技術はヒト抗体を作るトランスジェニックマウス作製とほぼ同時に開発され，治療薬としてのヒト抗体を作る方法と受け止められた．さらにヒトB細胞由来のmRNAを抗体遺伝子ソースとして使うために「ヒトタンパク質に対する抗体が存在しない」,「重（H）鎖と軽（L）鎖の組み合わせがin vivoを反映しない」,「抗原による免疫がされないので結合力が弱い」といった様々な批判を受けた．1975年に開発された細胞融合によるモノクローン抗体作製技術はマウスで広く利用されているが，ヒトでは一般性の高い方法はない．その最も大きな理由がヒトとマウスでは抗体の種類（レパートリーサイズ）が大きく異なることに由来するのであるが，そのことが認識されていない．マウスの抗体は百万種類でありヒトはその数百倍の抗体レパートリーを有する．ファージ抗体ライブラリーは千億種類の異なるクローンを集団として扱うことができるので，ヒト抗体レパートリーを完全に覆うことが可能である．ヒトとマウスでは個体の大きさ，寿命，動物種としての生き残り戦略が大きく異なる．研究者はVDJ再編成と一括りにするが，詳細に比較すると，その多様性を巨大にする最も重要な部位であるH鎖CDR3の多様化機構，具体的にはD遺伝子の種類と数，CDR3の長さが大きく異なる．ヒトでは，充分に多様な抗体を作って，その中から役に立つ（抗原結合力を持つ）抗体を選別する機構が重視され，マウスでは最初から無駄な抗体を作らない機構が重視される．ファージ抗体ライブラリーを利用することを試みた研究グループの多くは，抗原結合力の悪い抗体単離を繰り返す中で“役に立たない技術”として放棄した．我々は，細胞膜表面に存在するタンパク質に対する抗体を網羅的に単離する技術を開発し[1]，数十種類の癌特異抗原の同定と数百種類のヒトモノクローン抗体単離に成功した[2]．またヒト体内のインフルエンザウイルス中和抗体レパートリー解析にも成功した[3]．



参考文献

1) Akahori Y. *et al.*, (2009) *BBRC*, **378**: 832–835.
2) Kurosawa G. *et al.*, (2008) *PNAS*, **105**: 7287–7292.
3) Okada J. *et al.*, (2010) *Virology*, **397**: 322–330.

（くろさわ・よしかず，藤田保健衛生大学総合医科学研究所）

現象を数学で記述する

三村 昌泰

1. はじめに

リレー連載のテーマは「数学的な感覚の探求—思考法の源を探る」であるが，私は厳密に言えば数学というより数理科学の分野にいるので，それほど純粋数学的な感覚は持っていないだろう．しかしながら，良く似たものはあると思っている．それは，何らかの現象を見たとき，それが数学の言葉で記述できるのだろうか？ そしてもしそうであれば，どのような表現ができるだろうか？ という問いに対して浮かぶ感覚らしきものである．数学という世界から見るとかけ離れている自然や社会に現れる様々な現象に対して，数学的な記述（ここではモデリングと呼ぶ）ができれば，それによって，現象を数学の世界に持ち込むことができ，その解析を通して，それらの解明や予測を行なうことが期待できる．つまり，モデリングは現象と数学の掛け橋になるのだが，今のところ，数学の世界ではあまりやられていない．なぜなら，モデリングという作業は，論理の積み重ねからでき上がるものではないからであろう．しかも，現象を一つに限定しても，その中で何を，そしてどのように表現するのかによって，いくつかのモデルが考えられる．つまり，モデルは唯一つではなく，モデリングは主観的なものであり，ましてや正しくないモデルもある．一方，正しいとか，正しくないに関係なく，いったんモデルが与えられると，その解析は厳密な論理の積み重ねの作業であるから，結果は客観的でなければならない．このように，モデリングと数学解析は一般には相容れないものである．ただ，ニュートンや，ポアンカレの偉大な業績からわかるように，古くは融合して行われていたのであるが，20 世紀に入り数学が厳密な論理という世界で独自にそして急激に発展してきたことから，離れていったと言わざるを得ないだろう．しかしながら，21 世紀に入り，生命，医学，経済等様々な分野が複雑に入り交じった問題が我々の社会に現れ，その解明が緊急課題となった．そしてこの解決に対して数学・数理科学への期待が高まってきたのである[1]．そのための第一歩は，モデリングという作業であるが，これらの問題に現れる現象を記述するモデリングには物理における第一原理のような処方箋がないことから，数学からの歩み寄りがあまりなかったが，いまこそ数学側から積極的に参加することが要求されている．

「数学」と「モデリング」という 2 つのキーワードの中に数学的な感覚らしいものが潜んでいるのではないかと常々感じているので，ここではそれについてお話したい．

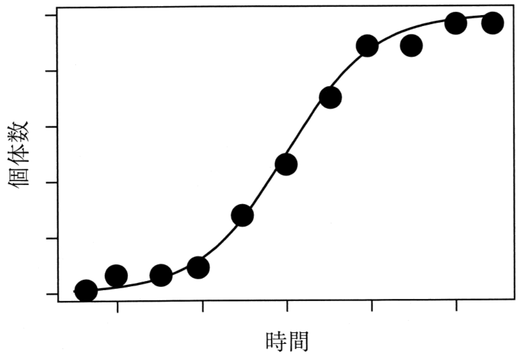


図 1　個体群の増加データ．

2. 人口の増加曲線

図 1 にある ● はある微生物が与えられた養分をとりながら個体数を増やしているデータである．その背後の曲腺はそれを適当に近似しているシグモイド（S 字型）曲線である．このデータ（曲線）の特徴は，最初，個体数はあまり増えないが，その後急激に増え出し，やがてほぼ一定の個体数で落ち着くというものである．このような曲線は日常的によく見かける曲線であり，例えば，学習（勉強）効果の時間変化である．効果は時間に比例して現れるものではない．学習を始めた当初はあまり現れないが，我慢して続けると，眼に見えた形で現れる．しかしながら，さらに続けていくと，目立った効果は現れなくなる．このことは誰もが一度は経験しているであろう．この時間変化は横軸を学習する時間軸，縦軸をその効果とすれば，図 1 のようなシグモイド曲線に表され，学習曲線と呼ばれている．

3. ロジスティック方程式

図 1 のようなシグモイド曲線が登場したのは 150 年以上前であり，1838 年ベルギーの数学者である P.F. フェルフルストによって提案された．なぜ，彼がこの曲線に興味を持ったのだろうか？ 当時，イギリスの経済学者 T.R. マルサスの著書『人口論』によって「人口は，もしも極めて強い妨げがなければ，幾何級数的に増加するであろう」ということは知られていたが，1830 年イギリスの政治家である M.T. サドラーが，19 世紀のヨーロッパ人口総数の増加変動から，人口が増加すると増加率は低下することを示し，人口増加を抑制するのは密度効果が要因であることを主張したのである．フェルフルストはこれに興味を持つとともに，ヘント大学で同僚であった A. ケトレーから多くの影響を受けていたのである．ケトレーは後に近代統計学の創始者と言われる，社会統計学者であり，1835 年の著書『人間とその能力の発達について』において人口抑制効果はマルサスの幾何級数的増加率に，（説明はしていないが）人口の 2 乗に比例するような "抵抗" する力が働いているのではないかと述べている[2)]．このような経緯の中で，整数論で学位を授与された純粋数学者のフェルフルストは社会科学，特に人口の増加にも興味を持っていたのであった．1838 年，彼は時間 t の人口（あるいは個体数）を $N(t)$ とするとき，人口の変動を表す方程式として，まず



P.F. フェルフルスト（1804–1849）．

$$N_t = G(N)N \tag{1}$$

を考えた．ここで N_t は N の微分 dN/dt である．また，$G(N)$ は個体の増加率であり，次の性質を満たす：

(A1) 人口が増加すると，それを抑制する密度効果が現れる，つまり，$G(N)$ は N の単調減少関数である．

(A2) 環境に依存した飽和個体数（$K(>0)$ とする）があり，個体数がそれに近づくと，増加率は零になる，つまり $G(K)=0$ である．

この仮定の下で，彼は次の非線形微分方程式を提案した：

$$N_t = r\left(1-\frac{N}{K}\right)N, \quad t>0. \tag{2}$$

ここで，r は個体が本来持っている増加率で正定数とする．この方程式の特徴は，個体数が非常に少ないときには（マルサスの言ったように）増加率 r で増えるが，個体数が多くなると，増加率は個体数に依存して減少する．例えば，個体数が飽和個体数の半分である $K/2$ になれば，増殖率は $r/2$ と半分になるのである．さらに，個体数が増加し，飽和個体数 K に近づいていくならば，増殖率は零になることである．フェルフルストは数学者であるので，この非線形微分方程式を容易に解くことができ，解 $N(t)$ は $t=0$ における個体数（初期個体数）を $N(0)$ としたとき，

$$N(t)=\frac{N(0)e^{rt}}{1+N(0)(e^{rt}-1)/K} \tag{3}$$

と表される．つまり，初期個体数 $N(0)$ が小さければ，(3) より $N(t)$ は，図 1 で示された曲線を表すシグモイド型関数で表され，十分時間が経つと，K に近づくことがわかる．彼はパラメター r, K を適当に選ぶことから，(3) が 1796 年から 1827 年までのロシア，1817 年から 1831 年までのフランスの人口総数の変化とかなりよく合っていると述べ，さらに，1815 年から 1833 年までのベルギーの人口総数の変化から，最大人口総数は 940 万人であろうと予想したのである．

人口総数の時間変化が微分方程式で表されることは大変興味深いが，少し疑問に思うのは，フェルフルストは (1) の増加率に (A1), (A2) を満たす密度効果を導入するときなぜ $G(N)=r(1-N/K)$ という N の 1 次式を考えたのだろうか？ もちろんケトレーの示唆があったとは思うが，私ならば，定数 $m \geq 1$ に対して

$$N_t = r\left(1-\left(\frac{N}{K}\right)^m\right)N, \quad t>0 \tag{4}$$

をまず考える．なぜなら，(4) のほうが一般的であり，(A1), (A2) を満たしているからである．残念ながら彼に聞くことができないが，$m=1$ と考えたのは恐らく彼がシグモイド曲線をみたときの「数学的な感覚」からではなかろうか．彼は (2) を以後ロジスティック方程式と呼んだが，残念ながら，この式はその後あまり評価されず，やがて忘れられてしまったのである．

それから 80 年ほど経ち，1920 年アメリカの生物学者 R. パールと生物統計学者 L. リードはアメリカの人口総数の増加を予測するために，フェルフルストの提案したロジスティック方程式と同じ式を独立に導出し，アメリカの人口総数は 2060 年頃には 1 億 9700 万人に達すると予測したのである．さらに，それを確認するために，1927 年にショウジョウバエの培養実験を行い，個体数の増加曲線がロジスティック方程式の解と一致することを示し，ロジスティック曲線が個体増加の普遍法則であると示唆したのである．

しかしながら，果たして実験データがロジスティック曲線 (3) に良く合うということだけで (2) がモデルとして良いのかということに対して疑問を感じる読者もいるであろう．これに対して，ソ連の生態学者 G.F. ガウゼはロジスティック方程式が個体の増加を記述する良いモデルであることを確信していたのではないだろうか？ なぜなら，彼はゾウリムシの培養実験を行い，個体が増加していくデータから K の値をまず求め，それから各時間毎に $\log(1/N(t)-1/K)$ を横軸を時間 t，縦軸を $\log(1/N(t)-1/K)$ のグラフにプロットし，それらが直線上に並んでいることを示したからである．この結果は何を意味するのであろうか？ 実

は，(3) を

$$\frac{1}{N(t)} - \frac{1}{K} = \left(\frac{1}{N(0)} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} \qquad (5)$$

と変形すると

$$\log\left(\frac{1}{N(t)} - \frac{1}{K}\right) = \log\left(\frac{1}{N(0)} - \frac{1}{K}\right) - rt \qquad (6)$$

が導かれる．すなわち，ロジスティック方程式の解 $N(t)$ は $\log(1/N(t) - 1/K)$ でプロットすると，直線となるのである．ガウゼはこのことを知っていたのであろう[3)]．こうして，ロジスティック方程式は数理生態学において個体群の増加を記述する基礎モデルになったのである．

4. 環境破壊

ロジスティック方程式の示唆により，多くの実験家は微生物を培養するとき，個体数が増加してほぼ一定になるという結果を知ることになり，以後，個体数が飽和個体数になると実験を停止していたのだが，そのまま実験を続けていくと，個体数は一定にならずに，下降していく実験結果が数多く報告されたのである．その主な原因は環境の悪化であろうと言われている．このことは個体数が増加していくときには，ロジスティック方程式は良いモデルだが，飽和個体数近くになると使えないことを意味している．これは室内実験だけではなく，我々にとっても深刻な問題でもある．なぜなら，我々の住んでいる地球であっても食料やエネルギーの急減，大気汚染等から環境の悪化が進んでいるからである．国連データの推計によると，現在の世界人口総数は約 71 億人であり，1 日で約 20 万人増えていると言われているので，現状ではまだロジスティック方程式が有効な範囲であろう．その結果を使うと，世界の飽和人口総数は約 90 億人であり，2050 年頃に到達すると予測されている[4)]．その後どうなるのであろうか．我が国においてはより深刻である．総務省統計局によると人口総数は 2008 年は約 1 億 2800 万人であるが，それをピークとしてすでに下降の段階に入っており，2012 年では約 1 億 2750 万人と減少し，ロジスティック方程式では予測できない．

このような現状を踏まえ，国連や各国の政府機関は真剣に人口総数の将来予測ができるモデル構築を行っている．さて，我々は，フェルフルストのように，数学的感覚から新たな方程式が浮かぶだろうか．もしも個体数の下降が我々自身によって作り出された大気汚染や自然破壊などの環境破壊であるとするならば，その影響はすぐに現れるものだけでなく，長い時間経ってから現れるものもあるだろう．その効果をロジスティック方程式に考慮すると，次のような微分積分方程式が浮かんでくるであろう：

$$N_t = r\left(1 - \frac{N + aH(t)}{K}\right)N, \quad t > 0. \qquad (7)$$

ここで a は正定数で環境破壊定数である．また，$H(t)$ は環境破壊による抑制効果であり，

$$H(t) = \int h(t-\tau)N(\tau)d\tau \qquad (8)$$

とする．ここで $h(s)$ は環境破壊効果を示す積分核である．積分範囲は 0 から t までとする．明らかなように，環境破壊がないときは $a = 0$ となり，(7) はロジスティック方程式 (2) になる．ここで，環境破壊の影響は現時点が最も強く，過去になればなるほど影響は弱いという単純な状況を考えると，$h(s)$ の一例として，正定数 k に対して $h(s) = e^{-ks}$ が考えられる．このとき (7) は (N, H) に対する微分方程式系

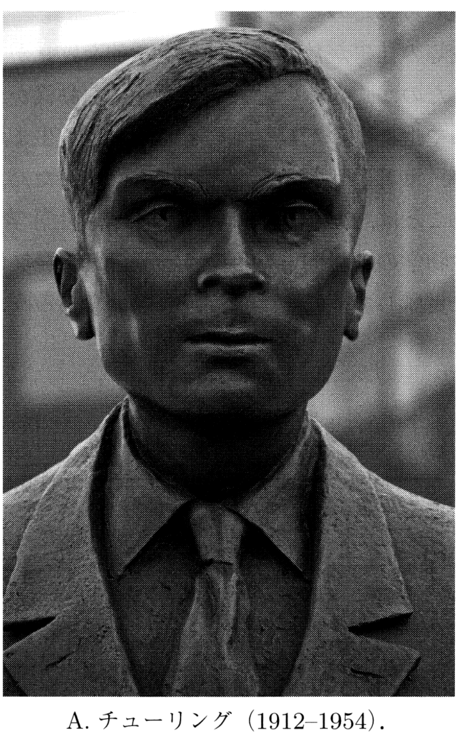
$$\begin{aligned} N_t &= r\left(1 - \frac{N + aH}{K}\right)N, \\ H_t &= N - kH \end{aligned} \qquad t > 0 \qquad (9)$$

で表される．その結果，相平面解析法から，(9) の解 $N(t)$ は十分時間が経つと，$kK/(k+a)$ に近づくことがわかる．このことから，環境破壊がひどい（a が大きい）あるいは過去の環境汚染の影響を強く受ける（k が小さい）ときには $N(t)$ は環境破壊の影響を受けて飽和個体数 K には近づかずに減少していくことがわかるであろう．

(7) はもちろんモデルではない．モデルにたどり着くためには，人口問題や数理科学の分野の専門家たちと共同して研究を進めていかなければならないのは明らかであろう．しかしながら，それにしては (7) は我々が持っている数学的な感覚から浮かんだ玩具方程式であるが，かなり納得のいく方程式ではなかろうか．

5. 拡散のパラドックス

インクを水に滴下したときの広がりや，煙が空気中に拡がる様子は良く見かける拡散現象であるが，最近では，「原発事故による放射性物質の拡散」，「ネット選挙のデマ拡散」，「ウイルスの拡散」等の言葉が日常的に使われているように，拡散は「一様に拡がっていく」という単純な振舞いを意味する．このように誰もが知っている拡散現象に対して，イギリスの数学者であり，暗号解読者であり，計算機科学のパイオニアと言われるA. チューリングは，1952年，拡散は「必ずしも一様に拡がらずに，逆に集中化させる」という性質をもつという我々の常識を覆すパラドックスを単純な微分方程式を用いて示したのであった．チューリングは数学者でありながら，なぜこのような考えを思いついたのであろうか？ 数学的な感覚なのだろうか？ まず，彼の言ったパラドックスがどのようなものかをまず説明しよう．



A. チューリング（1912–1954）．

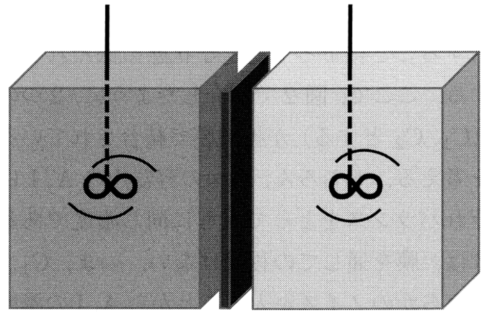


図2　拡散膜で結合される2つの容器．

インクの入った水溶液の容器を2つ考え，水溶液は充分かき混ぜられて，インクの濃度は一様になっているとする．2つの容器は，図2のように，透過膜で結合され，透過膜の性質は，インクは濃度の高い水溶液の容器から低い濃度の容器に移動させるという性質を持っているとする．いま2つの容器内でのインク濃度は異なり，水溶液の色は異なっているとする．このとき2つの容器内のインクは膜を通して移動し，やがてインク濃度は等しくなり，2つの容器内の水溶液は同じ色になるであろう．このような性質をもつ透過膜を拡散膜という．チューリングは，適当な条件の下では，2つの容器内の化学物質濃度の差は逆に徐々に大きくなっていくという状況が起こり得るのではと考えたのであった．それを説明するために彼はインクの代わりに，2つの化学物質（A, Iとしよう）を考える．A, I はある化学反応のもとで次のような相互作用をしているとする：

(A3)　A は自己触媒によってどんどん増えていくが，同時に，I を作り出す．

(A4)　作り出された I は A の増加を抑える．

A は自ら持っている増殖効果を抑えるような I を自ら作り出すという一見奇妙に思われる性質であるが，これがチューリングのユニークな所であろ

う．容器内の A, I は増加と抑制 2 つの効果がバランスすることによって安定な状態に保たれているとする．ここで，図 2 で紹介したように，2 つの容器（C_1, C_2 とする）が拡散膜で結合されている状況を考える．もちろん，2 つの容器内の A, I はそれぞれバランスをとってともに同じ濃度であるとすれば，膜を通しての移動はない．いま，C_1, C_2 内に何らかのノイズが入ることから A, I の濃度に変化が生じたとしよう．この結果，拡散膜の性質から，C_1, C_2 内に A, I は膜を通して移動が始まるが，やがて 2 つの容器内の A, I 濃度はそれぞれ等しくなると思われる．しかしながら，チューリングは，もしも拡散膜が A はあまり通さないが，I は良く通す性質を持っているならば，必ずしもこのような結果にならないと主張したのである．いま，C_1 内の A 濃度がわずかのノイズで高くなったとしよう．そうすると，それを抑えるために I 濃度も高くなる．その結果，C_1 内の A, I は拡散膜を通して C_2 内に流れ込むことになる．しかし，拡散膜の性質から，C_1 内の I は C_2 内には流れ込むが，A はあまり流れ込まない．その結果，C_2 内では，A はあまり増えないが，I は増加する．この結果，C_1 内では A はさらに増えるが，C_2 内で減少することになる．こうして，C_1 内では I もまた増えることになるが，先ほどと同じように，C_2 内に流れ込み，A は流れ込まない．このプロセスを繰り返すことで，C_1 内の A はどんどん増え，C_2 内ではどんどん減っていくことになる．すなわち，A の透過率よりも I の透過率が大きい拡散膜を考えるならば，2 つの容器の A, I 濃度の差は大きくなっていくのである．以上のストーリーは直感から来る予想であるが，チューリングはこの予想を数学とコンピュータシミュレーションを使って示したのである．この拡散パラドックスは「拡散誘導不安定化」と呼ばれているが，チューリングはどうしてこのような拡散パラドックスを思いついたのだろうか？ 数学者が持っている感覚から生まれたのであろうか？

6. 結び

以上では 2 人の数学者を紹介した．まず，フェルフルストは人口の増加を記述するシグモイド曲線を表現するロジスティック方程式を提案したのだが，その後まったく忘れられており，約 80 年経ってからやっと生態学者の注目を浴びたのである．同様の話はチューリングも同じであった．彼が拡散パラドックスを出した目的は，生物の発生過程にいて最も重大なイベントの一つである細胞分化や形態形成の仕組みにはこのパラドックスが重要な役割をしているのではないかと示唆することであったが，残念ながら，当時の生物界は分子生物学や分子遺伝学等新しい学問分野が誕生し，生物が持つ遺伝情報を理解することができれば，生命系が解明できると考えられていた時代であり，しかも彼が数学者であり，生物現象を記述するモデルを導出したのではなく，単に彼の考えは数学を使って説明したにすぎないと思われたことから，彼の主張は数学者の机上の空論であると片付けられたのであった．それから約 40 年経ってやっと拡散パラドックスは現実の系として化学反応系で確かめられたのであった．

彼等の仕事が数学者の持つ数学的な感覚から生まれたのか，あるいはもっと積極的な動機から生態系や生物系の本質を見据えた結果から生まれたのか，筆者は判断することはできない．ただ，確かなことは，2 人の仕事は，現在の数理生態学，数理生物学の理論的支柱となり，両分野の発展に多大な貢献してきたことは間違いないであろう．

参考文献

1) 数学イノベーション戦略（中間報告），研究振興局基礎研究振興課／数学イノベーションユニット（2012）．
2) A. ケトレー：『人間に就いて』（平貞蔵・山村喬訳）岩波書店（1940）．
3) G.F. ガウゼ：『生存競争』（吉田敏治訳）思索社（1980）．
4) http://www.arkot.com/jinkou/
5) 三村昌泰：「チューリングと自己組織化」数学セミナー，2012 年 7 月号，19–23.

（みむら・まさやす，明治大学大学院先端数理科学研究科）

科学と社会

Science & Society

第18回　国家・学問・戦争の諸相

第二次大戦下の物理学者 (1)

アメリカでの一断面

岡本 拓司

前回，前々回と，量子力学の登場が，ヨーロッパ以外の地域，具体的にはアメリカと日本における物理学の展開にどのように関わったかについて述べた．第二次大戦が始まると，量子力学の受容期に活躍した物理学者の大半は，どちらの地域でも，科学動員の世界的な潮流の中で何らかの役割を担っていくこととなる．今回および次回は，このような物理学者の活動の中から，科学と戦争の関わりを検討する上で重要な材料となり得る事例をアメリカと日本から取り上げる．

18.1 ブリッジマンの科学観・社会観

今回取り上げるのは，第 16 回で言及したハーヴァード大学の物理学者，ブリッジマン（Percy Williams Bridgman, 1882–1961）の，第二次大戦前後の言動である[1)]．

第二次大戦下でアメリカの物理学者が関わった事業には，マンハッタン計画による原子爆弾の開発，マサチューセッツ工科大学（MIT）の放射研究所（Radiation Laboratory）におけるレーダー開発，カリフォルニア工科大学における固体燃料ロケットの開発，ジョンズホプキンス大学における近接信管の開発があり，特に原子爆弾の開発については日本でもよく知られている．放射研究所のレーダー開発に 15 億ドル，原爆開発に 20 億ドルが費やされており[2)]，アメリカで，自国でも他国でも例のない規模で科学行政の重要度が増すのもこの時期以降である．一方，戦時下の研究開発や科学行政に関してブリッジマンの名前を目にすることはほとんどないと言ってよい．

ブリッジマンの第二次大戦下の科学動員への関与としては，原爆開発に関する秘密契約を介した研究結果の提供があった程度で，科学行政についても特記すべき活動があったわけではない．マンハッタン計画を指揮したオッペンハイマー（J. Robert Oppenheimer, 1904–1967）はハーヴァードの化学科の学生であった時期にブリッジマンに師事しており，戦時下の科学行政の中心にいたコナント（James Bryant Conant, 1893–1978）は彼の終生の友人であったが，戦時中，多忙を極めた彼らとの連絡は途絶えがちであった．

にもかかわらず今回ブリッジマンに注目するのは，この人物の大戦前後の言動が，科学動員とは疎遠であった彼のような科学者でさえ，1930 年代後半以降の世界情勢の中で国家と科学の関わりについて真剣な検討を加えざるを得なかった事情をよく示しており，またそれを首尾一貫した形で表現しているように思われるからである．首尾一貫していたとしても，同時代の多くの科学者の支持

を集めたわけではない．しかし，少数派に属する彼が，それでも彼なりの決意をもって，戦時下の国家を批判しながら科学動員に協力していった経緯は，科学者と戦争の関わり方が多様であり得ることを示しているといえる．

ブリッジマンと戦時動員との関わりは第二次大戦期のものが初めてではなく，第一次大戦時にも，高圧物理学の専門家として大砲に関する助言を海軍に自発的に提供しており，大戦後もしばらく，コネティカット州ニューロンドンにおいて潜水艦対策に関する研究に従事していた．このとき，自身は現在自分の行動に関して何が必要かを十分わきまえており，形式的な要請に応えたくはないとして，海軍からの秘密保持の宣誓の要求を拒否している（1919 年）[3]．ここでは明言しなかったが，ブリッジマンは，子供の頃無理に教会に通わされた経験から，宗教への関心を失って無神論者となっていたため，何らかの宗教的・精神的な権威に対して誓うことはできなかった．また，のちに様々な形で自身が明らかにすることになる，自由な個人が知的に誠実に振る舞うことを最重要視し，これに対する社会や国家の干渉を嫌悪するという態度が，宣誓拒否となって現れたともいえる．

ブリッジマンは，操作による物理学上の諸概念の定義を提唱した『現代物理学の論理』[4]（1927 年）が好評を博すると，ときおり社会批評も発表するようになった．このうち，1935 年に発表された「知的誠実さへの苦闘」[5]では，自然現象の探究においては，自身の意向に関わらず研究結果に従わざるを得ない科学者の態度や，彼らの得た成果が，人類の文化の最終到達点，人類をその他の生物から分かつ標徴であるとし，大恐慌（1929 年）後の反科学的な論調に抗して，科学研究に制限を設けることはできないと主張した．その上で，こうした知的誠実さを社会制度に適用していくことを推奨し，当時問題視されていた若者の宗教離れは科学の普及に伴って必然的に起こる事態であると指摘した．また，この知的誠実さの適用の一例として，やや挑発的に，将来において苦痛のほうが喜びよりも多いことが確実であるならば，人生から退場するのも自然な選択であるとも述べた．この主張を実現するかのように，ブリッジマン自身，1961 年には，癌の苦痛に堪えかねて，別荘で銃による自殺を遂げている．その際最初に駆けつけたのがコナントであった．

科学者の知的誠実さの社会制度への適用が多くの混乱を招くであろうことは，ブリッジマン自身も意識していた．それでも彼がこれを推奨したのは，19 世紀末からの新たな事実の集積がもたらした困難を，何が実際に行われるかに注目し，操作を中心に据えた分析――彼は特殊相対論における同時性の定義がその典型であると考えていた――によって，相対論以降の物理学が解決してきたという理解に基づいていた．第一次大戦以降の，日本の満洲での振舞いを含む国内外の混乱の蓄積もまた，彼にとっては，同様の方法によって検討すべき対象であった．

1930 年代後半，全体主義国家における個人の抑圧への憂慮が世界的に募るようになると，1938 年から 1940 年にかけての著作や講演[6]において，ブリッジマンは，個人の知的誠実さを重視する主張をさらに強め，個人的営みとしての科学に注目する独自の科学観を展開するようになった．各個人が自身の知的誠実さに基づいて認めない限り，いかなる主張も正しいものとは言えないというのが彼の信念であり，自分は自身の知的道具だて（intellectual tools）のみをもって一人で宇宙に存在しているとさえ主張した．権威をもって強制的に個人を従えようとする，スターリン（Иосиф Виссарионович Сталин, 1878–1953），ヒットラー（Adolf Hitler, 1889–1945），ムッソリーニ（Benito Amilcare Andrea Mussolini, 1883–1945）の体制は，従って，ブリッジマンにとっては到底受け入れがたいものであった．

ブリッジマンにとっては，知的活動において最も重要であるのは，個人が個々の内容を承認することであり，そこからは，自分の痛みが他者の痛みでないように，自分の科学は他者の科学ではないという結論が導かれた．彼にとって，科学は公的（public）ではなく私的（private）なものであっ

た．一方で，こうした主張が，多くの科学者にとって受け入れがたいものであり，彼の同僚のほとんどがむしろ他者の承認のほうを重視していることはブリッジマンも十分理解しており，さらに進んで，自分ではなく他者の了解により高い権威を認めがちであるという欠点においては，民主主義も全体主義と同列であると判断していた．

近い将来生ずるかもしれない戦争に関しては，物理的な力を用いるのに最も長けた職能集団（物理学者）の一員として，その他の方法での解決が望めない状況では，物理的な力のみに頼った問題解決の手段（戦争）が取られるのは自然な成り行きであると観察していた．ブリッジマンも，第一次大戦時の毒ガスのように，科学の軍事利用が戦争をより悲惨なものにすることは認めていたが，戦時下の国家は勝利のためには手段を選ばないであろうことも想定していた．不戦条約も空しく第二次大戦が発生し，そこで科学研究が原子爆弾のような兵器を生み出すといった過程を想像していたようにも思われる．

18.2「一物理学者の『声明』」

ブリッジマンは，1905 年以降，前人未到の高圧を達成することに成功しており，高圧下での物質の諸性質の測定結果を蓄積していたので，彼の研究室には世界各国から問い合わせや訪問があった．しかし，1930 年代末になると，彼が科学の基礎にあると見なす，自由な個人の判断を脅かす体制からの訪問者については，冷淡な態度をとるようになった．1938 年 4 月，南満洲鉄道株式会社（満鉄）から，同社の中央試験所の S. Takashima（高島四郎）の訪問への対応を依頼されると，その目的がたとえ純粋な研究上の交流のためのものであっても，満洲にある鉄道会社の研究所の成果が，日本による中国の搾取（exploitation）のために利用されるのは不可避であるとして，これを断った．日本による中国への侵略を非難しての判断であったが，その背景にはまた，満鉄の研究者には，ブリッジマンが理想とするような自由な判断は許されていないという了解もあったものと思われる[7)]．

科学研究における自由を保障しない全体主義国家へのブリッジマンの批判は，1939 年に，*Science* 誌上において「一物理学者の『声明』」[8)]として発表された．「声明」は，全体主義国家の市民とは一切研究上の交流を持たないとする宣言から始まり，その根拠として，彼らは自由な個人ではなく，行動のすべてが国家のためになされているという観察が示される．ブリッジマンによれば，全体主義国家は，科学知識の自由な探究それ自体が人類の目的であるとする科学の――実際にはブリッジマンの――理想を受け入れず，科学の成果を国家のために徴用（commandeer）しようとする．これは，これらの国家が，科学における自由な交流の前提となっている了解を否定していることを意味するとブリッジマンは見なす．その上で，科学知識の悪用（misuse）を防ぎ，これらの国家の振舞いへの嫌悪を表明するために，交流を中止するというのである．

「声明」には賛同の声も寄せられたが，反対する者も多かった．特に，亡命を選択せずに自国に残り，ナチスへの抵抗を続けているドイツ人科学者の存在を知る者，例えばボルン（Max Born, 1882–1970）は，「声明」に示された判断は感情には響くが理性には訴えないと指摘した．大学の同僚の多くも「声明」の主張を疑問視したようであるが，この件でブリッジマンと直接やりとりをしたのは，親しい友人でハーヴァードの天文台長のシャプリー（Harlow Shapley, 1885–1972）のみであった．シャプリーは「声明」への反感を隠さず，自身が携わっていた知識人の亡命を援助する活動への参加を促した．これに対してブリッジマンは，現実に起こっている深刻な事態に直ちに対応することの重要性を訴え，国家に統制されることを当然とする科学者の世代が誕生してしまってからでは手遅れであると応じた[9)]．

全体主義国家の振舞いが，「物理学者に対する挑戦」を構成することは，アメリカが戦争に突入してから書かれた，この題をもつ小文においてさらに具体的に主張された[10)]．ブリッジマンは，全体主義国家は，その半分は自由であるが残りは奴隷

である社会を生み出しつつあり，人々に知性の自由な使用を許さないと見なしていた．これに抵抗できるのは，自然を人類の支配下に置くことに従事してきた物理学者であり，彼らこそ，人間が自身の運命の支配者たり得ることを示すべきであると彼は主張する．さらにまた，ここにこそ物理学の最大の成果があり，その価値はあらゆる技術的な応用のそれを越える，人類の知性はこの領域において用いられるべきであるとも論じた．ブリッジマンにしてみれば，科学者，物理学者にとって，彼らの自由な探究を脅かす全体主義国家との戦いが不可避であることは自明であった．

18.3 アメリカ物理学会会長として

ブリッジマンは，1942 年，戦時下のアメリカの物理学会会長を務めている．全体主義国家と闘う国家における物理学者の集団の代表として彼が経験したのは，しかし，科学と戦争の結び付きが密接になるにつれ，彼自身が所属する国家がその敵国と同様の振舞いに及ぶようになっていく過程であった[11]．

戦時中，学会の予稿集など，物理学会の刊行物は検閲を受けており，戦時研究と関わりの深いものの発表は禁止された．軍関連の仕事に従事している物理学者の現住所は秘密であるという注意を，戦時の科学動員の中枢にいたコナントとブッシュ（Vannevar Bush, 1890–1974）から受け，ブリッジマンは会員名簿の刊行も中止した．

さらに，1942 年の年会はシカゴ大学での開催が予定されていたが，10 月，すでに講演者も招待され予稿も届きつつあった頃に，同大の物理学科から，秘密研究が行われているので，シカゴでの会合は評議会のみにしてほしいとの要請が届いた．同大の冶金研究所（Metallurgical Laboratory）はマンハッタン計画の拠点の一つであり，すでに連邦捜査局（Federal Bureau of Investigation, FBI）は，シカゴに来ている物理学者が誰であるかが知られることを恐れて，近隣の物理学者が同大に近づくことを禁じていた．ブリッジマンは，やはり軍事研究に関わっていた自身の勤めるハーヴァード大学や，その近隣の MIT の例などから類推して，過剰な警戒ではないかとも考えたが，年会はニューヨークで開催されることとなった．

同年の 11 月は，陸軍の鉄道の使用の妨げにならないよう，年末に予定されている様々な会合を延期せよとの要請が，防衛運輸局（Office of Defense Transportation）から諸団体に送られた．ブリッジマンは，アメリカ科学振興協会（American Association of the Advancement of Science, AAAS）はこれに従うので，物理学会も協力せよとの連絡を受けた．彼は，アメリカンフットボールの大会であるローズボール（Rose Bowl）が開催され，そのための旅行も許されている一方で，学会開催（年会は年末に行われていた）が制限されるのは承服できないとして抵抗したが，評議会は学会の 1 月後半への延期を決定した．

第一次大戦を経験したアメリカは，第二次大戦では動員や統制をさらに徹底させており，例えば多くの女性が戦場でも工場でも活躍していた[12]．第一次大戦を経験しなかった日本や，女性の役割を固定化する傾向のあったナチス・ドイツは，この点では後れをとっていた．大規模な科学動員を始めていたアメリカはまた，科学者の活動に対する厳重な統制を実施していた．

研究活動への様々な制限を，ブリッジマンも最終的には受け入れたが，これは，現下の戦争が，科学の存立基盤を脅かす全体主義との戦争であったためであろう．しかし，場所と時期の変更を余儀なくされた年会での退任講演[13]（1943 年 1 月 23 日）で，彼は遂に不満を爆発させた．ソ連やイギリス（ブリッジマンはバナール（John Desmond Bernal, 1901–1971）の『科学の社会的機能』[14]に言及している），およびアメリカでも一部進行しつつある，科学を国家の統制の下に置こうとする傾向を憂えて，彼はこう言い放った——「科学が社会の僕である以上に，より根本的な意味において，社会が科学の僕である」．

ブリッジマンにとっては，科学のみが，自然の理解を通して後戻りのない発展を社会に保証する

営みであった．彼はまた，科学の成果は社会が管理すべきであるが，完全な自由を必要とする科学者の活動に関しては，その成果に対するものも含めて，一切責任が問われるべきではないとも論じた．自由の保障に対して科学が社会に提供するのは「真理の探究」(pursuit of truth) であるとし，ブリッジマンは，これが十分な対価とは見なされない可能性も認めつつも，真理の探究のみが人類を他の動物と分かつ活動であるとの長年の主張を繰り返した．もちろん，彼が所属する国家は，科学の基盤である自由を脅かす全体主義国家との戦いに従事していたのである．しかし，戦争が進行する中で，自国においても科学者の自由が制限されるのを見た彼は，こう問わざるを得なかった――「我々は一体何のために戦っているのか」("What are we fighting for anyway?")．

18.4 科学における自由

退任講演への反応はわずかであり，大勢はむしろブリッジマンの主張に反する方向に進んでいた．1943 年 2 月には上院議員キルゴア (Harley Martin Kilgore, 1893–1953) により，科学技術動員のための政府機関を設けるための法案が提示された．学術団体などの反対によりキルゴア法案は結局成立しなかったが，審議の過程で，ブリッジマンはキルゴアやマサチューセッツ州出身の上院議員らに抗議の手紙を送った．その内容は，科学者も市民として権利を擁護されるべきであり，国家に搾取される奴隷の地位に甘んずることはできないという激しいものであった.「私の頭脳は私自身のものである．私が国家にこれを与えることはあるが，国家がこれを私から奪うことはできない」――キルゴア宛ての書簡の中の一節である[15)]．

AAAS の会報 (Bulletin) の 1943 年 5 月号には，コナントらが科学動員への支持を表明した決議が掲載された．ブリッジマンはこれにも抗議の手紙を送り，戦勝に最短の時間で到達することは重要ではなく，自由の抑圧や理想の放棄がその対価であるとすれば，長期的にはむしろ勝利より敗北のほうが望ましいとさえ述べた[16)]．

1943 年の 8 月になると，退任講演への反応が思わぬところから舞い込んだ．*Nature* でこの講演について読んだマンチェスター大学の M・ポラニー (Michael Polanyi, 1891–1976) から，抜刷を送ってほしいという依頼と，創設者に彼を含む「科学自由協会」(Society for Freedom in Science) が，ブリッジマンの主張に沿った活動を行っているとの情報が送られてきたのである．

イギリスでは，1930 年代，科学労働者協会 ((British) Association of Scientific Workers, BASW) の活動や，バナールの著作に代表される，科学の実利的な効用を強調するかに見える議論が目立つようになっていた．ポラニーらはこの動きを警戒し，バナールへの批判[17)]を発表すると同時に，1940 年には，オックスフォードの生物学者，ベーカー (John Randal Baker, 1900–1984) らとともに科学自由協会を設立した．ポラニーらの活動は，しかし，支持を集めることはなく，1944 年 7 月に至っても会員数は 134 名にとどまっていた．事情を聞いたブリッジマンはアメリカでの情報普及を勧めたが，最終的には彼自身が *Science* 誌上でこれを行うこととなった[18)]．イギリスではバナールへの賛同者のほうが多く，科学自由協会に関する記事の掲載を *Nature* などに拒絶されていたベーカーは，ブリッジマンの協力を歓迎したが，ブリッジマンが取りまとめたアメリカでの入会申し込みも，最終的には 50 前後にとどまった．

ブリッジマンは，会に関する自身の文章を，*Science* 掲載前にシャプリーに見せていたが，後者の反応は，会の主張は，科学の社会に対する貢献や責任を無視する点で反動的であり，認めがたいというものであった．会に関するブリッジマンの文章が *Science* に掲載されると，シャプリーに近い天文学者で，アメリカ科学労働者協会 (American Association of Scientific Workers, AASW) でも活躍していたボック (Bart Jan Bok, 1906–1983) が反論をブリッジマンに送り，やはり *Science* に投稿する予定であると伝えてきた．ボックの反論は，AASW と BASW の親近性を指摘するブリッ

ジマンの文章は正確でないとし，さらに，AASWが科学の自由も保障するので別団体の設立は不要であると指摘していた．ブリッジマンは，AASWはソ連に親近感をもつ共産主義者が主導する団体であり，科学自由協会の主張を代弁することはあり得ないと応じた．

ボックの文章は *Science* に掲載を拒絶されたが，この報を得たシャプリーは，これが科学の自由なのかとブリッジマンに迫った．AASWの他の会員からも，これを科学の自由の侵害であるとする抗議文が *Science* に送られ，水面下では，科学自由協会のベーカーは反ロシアで汎ナチスではないか，しかしポラニーは反ナチスであるなどの噂が飛び交った．最終的には，*Science* には，ボックの文章は，その主張を「中和する」[19]意味を持つ，科学自由協会会員でスタンフォード大学の化学者ロス（Sydney Ross）の，科学自由協会のアメリカでの設立を必要とする文章と並んで掲載された[20]．

科学自由協会をめぐる活動は，政治的傾向の極めて希薄なブリッジマンが，党派性と呼び得るものを見せた生涯でほぼ唯一の機会であった．一連の動きは，彼の危機感の強さを示すと同時に，彼の主張に反して，科学の社会に対する貢献と責任を重視する傾向が，戦時下のアメリカの科学者の間で強まっていたことを明らかにしている．

18.5 社会的責任

危機感の強さとともに，必要と感ずると状況に関わりなく発言してしまう一種の鈍感さもブリッジマンにはあったのであろう．周辺を顧みない意見を躊躇なく表明する彼の最後の標的は，徴兵猶予の規定であった．ノルマンディー上陸作戦（1944年6月6日）が近づくと，兵員の必要数が予想を越えたため，戦時研究などに従事していた大学生・大学院生など若手の研究者に対する徴兵猶予の条件が厳しくなっていった[21]．この動きへの批判として，ブリッジマンは，社会における知性の役割の強調や，優れた知性はあらゆる人々に平等に与えられるものではないとの指摘，および優れた頭脳をもった人々は兵士としてではなく知的活動を通じて戦争に貢献できるという主張を文章にまとめ，購読者数の多い *Harper's Magazine* での発表を試みた．この文章は，複数の編集者に掲載を断られた末，徴兵に関する危機が消滅した翌年になってようやく発表の機会を得た[22]．もはや科学者の貢献の強制を批判して済む段階ではなく，若手科学者が戦場に散るのを防ぐ議論が必要になっていた．

兵役は，国家の安全を保証するために国家を構成する市民（ただしこの当時は男子）に等しく課せられる義務であり，これに関する不公平な措置は軍全体の士気や統制に影響する．徴兵の猶予や免除の規則の設定は多くの国々にとって重要な課題であり，特に，高等教育との関わりでは，これを享受できるのが通常富裕層であるために，社会的に優位な立場にある者が兵役においても特権を得ているとの印象が生まれないよう，細心の注意が払われる．こうした事情にはブリッジマンは関心を持たないようであった．優れた知性の保護が全体の利益になることが理解されるよう，科学者が先頭に立って人々を導くべきであると彼は主張したが，果たしてそれが実現するのがどうか，実現するとしてどれほどの時間がかかるのか，想像することもなかったようである．

自身の研究においては，ブリッジマンも戦争に協力しており，1943年の夏頃には，戦時研究に時間を奪われ通常の研究は行えない状態にあった．彼の任務は，原子爆弾の開発に関わっており，ウランやプルトニウムの圧縮率等の測定結果を送ることであった．科学者への強制には反対したが，全体主義国家と闘うアメリカ合衆国の市民として，自発的に，彼の能力が最も効果的に生かし得る形で――つまり研究を通して――貢献するのは，最後の選択としてはやむを得なかったのであろう．

自由な国の自由な市民が自発的に国家に協力するという姿勢は，1943年初めにハーヴァードのサイクロトロンがマンハッタン計画のために譲渡される際の，サイクロトロン委員会委員長としてのブリッジマンの対応にも現れていた[23]．ハーヴァードには，原子爆弾の実験を指揮することになるベ

インブリッジ（Kenneth Tompkins Bainbridge, 1904–1996）が建設したサイクロトロンがあったが，1943 年初め，これを譲り受けてロスアラモスに移設するという任務が，マンハッタン計画に加わったばかりのプリンストンの物理学者ウィルソン（Robert Rathban Wilson, 1914–2000）らに命ぜられた．目的を明かすことのできない一行は，陸軍での医学研究のためにサイクロトロンが必要だと言いたてて，戦時研究に駆り出された「英雄」たちの帰還までこれを守りとおそうとするブリッジマンらとの交渉にあたった．

ブリッジマンの著作のほとんどを読んでいたウィルソンは，科学者としても哲学者としても彼を尊敬しており，到底受け入れられるとは思えないあからさまな嘘を並べたてることを恥じて，もっぱら観察に回っていた．容易に機器を譲ろうとしないブリッジマンらに，一行は徴用に近い形で取り上げることもできるとほのめかしたが，学部長のバック（Paul Herman Buck, 1899–1978）は，その際には，その種の交渉には無敵のハーヴァードのロースクールが対抗すると応じた．やがて交渉には，自由な社会の自由人，アメリカ的倫理，家庭と国家，光の力に対する闇の力といった言葉が現れたようである．ブリッジマンが彼の社会観・国家観を披露したのであろう．

交渉が長引くと，しかし，ブリッジマンはついに，「君たちのいう理由では譲れないが，私が考える理由で君たちがこれを欲しているのならば，持っていってもよい」と言った．コナントが何事かを漏らしたか，あるいはブリッジマン自身も事情は察していたのであろう．以後は対価の交渉となり，ウィルソンには本来の価値の 10 倍から 20 倍とも思われる額で機器は譲渡されたが，実際には一行にはそれをさらに上回る支出が許されていた．サイクロトロンはウィルソンらによって解体され，ロスアラモスに移設されたが，虎の子との思わぬ再会でベインブリッジを驚かせることになる[24]．

ブリッジマンでさえ開発に協力した原子爆弾は，その投下が第二次大戦を終わらせたのみならず，戦争や国際政治の基本的な条件を一変させ，また人類を滅亡させかねない兵器を生み出した科学者の社会的責任がどうあるべきかという問題も提示した．この問題に対するブリッジマンの姿勢は，しかし，戦時中とほとんど変わることはなかった．1946 年 9 月の講演[25]では，原子爆弾の発明によって生じた問題は，文明の存続に幸運に任される以上の価値があるのであれば，ここ数十年のうちに解決されなければならないと述べたが，同年 12 月の講演[26]では，その責任は，科学者ではなく，科学の成果を利用する社会や，戦争の主体である国家にあると指摘した．戦争がなければ核兵器を生み出した科学者の責任もないが，戦争を消滅させる責任は科学者のみが負うべきものではない．市民として自発的に戦時研究に協力したブリッジマンは，科学の成果の利用の責任は市民全般や国家・社会にあるとし，ひきうけられない責任を感じようとする若い世代の科学者に疑義を呈した．

ブリッジマンは，2 つの講演の間にノーベル賞を受賞していた．熱心に彼を推薦したのはシャプリーであったから，科学観上の対立は業績の評価には影響しなかったと言える．ノーベル賞受賞者となったブリッジマンは，折に触れて社会問題に対する意見を求められるようになったが，1948 年には，前年末のオッペンハイマーの「科学者は罪を知った」という発言に対して，「罪があるのは〔原子爆弾を作りうるという〕事実を作った神である」と述べた．核兵器に関する科学者の責任については，しかるべき考慮の後に最低のこと（the damnedest）を行い，それでもなお罪悪感を覚えるというのは，大人になりきっていないか，自分の周辺の世界を認めきれない病理現象があるかであるというのが彼の理解であり，例えば兵士として戦闘に従事した一般市民の場合と同様であると理解していたようである[27]．

1950 年代に入ると，ソ連や共産主義への疑問視はアメリカでは当然のこととなり，ブリッジマンも科学自由協会の存在意義はなくなったと考えるようになった[28]．1955 年には，核兵器の廃絶と科学の平和利用を訴えるラッセル・アインシュタイン宣言に署名したが，これは，さすがに文明の存

続を幸運に任せていては，科学の維持も危ういと考えてのことであろう．

科学の成果は人類への最大の恩恵であり，優れた科学者は知性をもって社会に大きな貢献をなし得るので，戦時も通常の市民とは異なった形で義務を果たすべきである．ただし彼らの社会への貢献は自発的であるべきであり，強制されてはならない――．ブリッジマンの科学と社会の関わりに関する主張はこのようなもので，科学至上主義の一種と呼び得るであろう．それは正しいのかもしれないが，やはり広く受け入れられるかどうかは定かでなく，また受け入れられるとしてもそれまでにどれほど時間がかかるかは不明である．

それでも，歴史上の事実として，このようなやや特異な思想――特異な才能に附随することがある――の持ち主でさえ，第二次大戦下では，科学そのもののために，最低限市民としては全体主義との戦いを決意したことに注意すべきである．戦時下でも政府の動向を自由に非難できるアメリカのような体制は，科学者としての能力を提供してでも自発的に守るべきものに思われたのであろう．では，同時期の日本では，物理学者たちはどのような科学観のもとにどのような活動を取り得たであろうか．次回はこうした問題を検討したい．

参考文献

1) Takuji Okamoto, "Percy Williams Bridgman and the Evolution of Operationalism," (Ph. D. dissertation submitted to The University of Tokyo, 2004). http://hdl.handle.net/2261/40225
2) Daniel J. Kevles, *The Physicists* (Cambridge, Massachusetts, and London, England: Harvard University Press, 1987), p.308.
3) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," p.429.
4) P.W. Bridgman, *The Logic of Modern Physics* (New York: Macmillan, 1927).
5) P.W. Bridgman, "The Struggle for Intellectual Integrity," *Harper's Magazine*, Dec. 1935; Reprinted in P.W. Bridgman, *Reflection of a Physicist* (New York: Philosophical Library, 1955), pp.361–379.
6) P.W. Bridgman, *The Intelligent Individual and Society* (New York: The Macmillan Company, 1938); Bridgman, "Society and the Intelligent Individual," *American Physics Teacher*, **7** (1938), pp.109–116; Bridgman, "Freedom and the Individual," in Ruth Nanda Anshen, ed., *Freedom: Its Meaning* (New York: Harcourt, Brace and Company, 1940), pp.525–537; Bridgman, "Science: Public or Private?" *Philosophy of Science*, **7** (1940), pp.36–48.
7) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," p.440.
8) P.W. Bridgman, "'Manifesto' by a Physicist, *Science*, **89** (1939), pp.178–179.
9) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," pp.442–443.
10) P.W. Bridgman, "A Challenge to Physicists," *Journal of Applied Physics*, **13** (1942), p.209.
11) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," pp.444–447.
12) ドリス・ウェザーフォード著，永島利明訳，『女は働かなければならない　第二次世界大戦とアメリカの女性』(光人社，1998 年).
13) P.W. Bridgman, "Science, and Its Changing Social Environment," *Science*, **97** (1943), pp.147–150.
14) J.D. Bernal, *The Social Function of Science* (London: Routledge, 1939).
15) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," p.449.
16) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," p.448.
17) M. Polanyi, "The Rights and Duties of Science," *The Manchester School of Economics and Social Studies*, **10** (Oct. 1939), pp.175–193.
18) P.W. Bridgman, "The British Society for Freedom in Science," *Science*, **100** (1944), pp.54–57.
19) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," p.453.
20) Sydney Ross, "Freedom in Science," *Science*, **100** (1944), p.217; Bart J. Bok, "Freedom in Science," *Science*, **100** (1944), pp.217–218.
21) Kevles, *op. cit.*, 2), *The Physicists*, pp.321–322.
22) P.W. Bridgman, "The Prospect for Intelligence," *Yale Review*, **34** (1945), pp.444–461.
23) R.R. Wilson, "A Recruit for Los Alamos," *Bulletin of the Atomic Scientists*, **31:3** (March 1975), pp.41–47.
24) Kenneth T. Bainbridge, "Prelude to Trinity," *Bulletin of the Atomic Scientists*, **31:4** (April 1975), pp.42–46.
25) P.W. Bridgman, "New Vistas for Intelligence," in *Physical Science and Human Values* (Princeton University Press, 1947); reprinted in Bridgman, *Reflection of a Physicist* (New York: Philosophical Library, 1950), pp.553–568.
26) P.W. Bridgman, "Scientists and Social Responsibility," *Scientific Monthly*, **65** (1947), pp.148–154.
27) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," pp.463–464.
28) Okamoto, *op. cit.*, 1), "Percy Williams Bridgman," p.468.

(おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科)

脳信号の情報幾何

甘利 俊一

脳は情報を保持し，処理し，行動を決定する．同時に，学習や自己組織化によって自己の構造を高度化し，記憶として蓄える．その全貌を語ることはまだできないが，ここでは脳の情報を担う確率分布の話題を提供したい．神経集団のスパイク発火の相関から始め，高次相関，そのモデル，2分割ガウス分布などについてふれる．さらに，神経スパイクの時間間隔分布の推論について，情報幾何から導かれる推定関数を用いて調べる．最後に脳の情報の解読における情報損失の問題をFisher情報量の立場から論じ，捨てた情報や忠実でないモデルを使った解読がどのくらいの情報損失をもたらすかを調べる．

28.1 高次相関は情報を担うか

ニューロンの集団を観察すると，その発火パターンは確率的である．発火パターンを多数観測すると，各ニューロンの発火頻度と，2つのニューロンの発火の相関はすぐに計算できる．しかし，2次の相関に帰着できない高次の相関があるが，その計算はややこしい[1)]．発火パターン $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ の確率分布 $p(\boldsymbol{x})$ を定めるには，ニューロン数を n として，$2^n - 1$ 個のパラメータが必要である．$n = 100$ のニューロンの発火を何万回観測しようがデータ数が足りなくて，これらの値を計算するわけにはいかない．そこで，情報は2次までの相関で十分で，3次以上の高次相関は脳では無視して良いという，主張が出された．その根拠として，2次までの相関を使うことで，分布の形がほぼ正しく再現できるといわれる．しかし，実験データをもとに，3次以上の高次相関が脳の発火パターンに確かに見られること[2)]，脳は高次の情報を利用しているに違いないという論文もかなり出始めている[3~5)]．

単純なモデルを用いて，高次相関を調べよう[5)]．n 個のニューロンが共通の

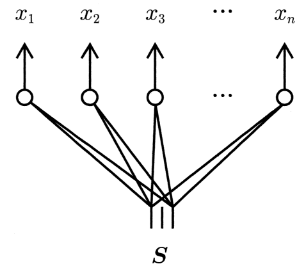


図 28.1　共通の入力により発火するニューロン.

入力情報を受け取り，それぞれが閾値を超えるか否かで発火したりしなかったりするモデルを考えよう（図 28.1）．共通の入力をベクトル $\boldsymbol{S} = (s_1, \cdots, s_m)$ とし，ニューロン i は，これらを重み $w_{i1}, \cdots, w_{im}$ で受け取るものとする．すると，ニューロン i が受け取る入力の重み付き和から閾値 h を引いたものは

$$u_i = \sum w_{ij} s_j - h \tag{28.1}$$

と書け，このニューロンの出力は $x_i = 1\,(u_i)$ となる．$1(u)$ は，u が正なら 1，そうでなければ 0 である．ここで，入力はランダムに発生するものとし，n 個の確率変数 $u_1, \cdots, u_n$ の分布に注目する．入力変数の数 m が大きければ，これらは同時ガウス分布に従うと考えてよい．さらに，入力の平均は 0 とし（0 でない分は閾値の項に含める），重み w_{ij} はランダムに選んで固定しよう．話を簡単にするために，u_i の分散を 1 に規格化し，u_i と u_j の共分散を α としよう．α はこのモデルでは，i, j によらず共通である．

このモデルは，すべてのニューロンが同等（巡回群に対して不変）なモデルである．簡単だから，その動作を調べるのに都合が良い．相関のある均質な n 個のガウス分布 u_i を，$n+1$ 個の独立な標準ガウス分布 $v_1, \cdots, v_n, \varepsilon$ を使って，

$$u_i = \sqrt{1-\alpha}\,v_i + \sqrt{\alpha}\,\varepsilon - h \tag{28.2}$$

と表現することができる．これはうまいトリックで，計算が大変容易になる．

上記のモデルで，n 個中の k 個のニューロンが発火するとき，$\sum x_i = k$ でその集団発火率は $r = k/n$ と書ける．n は大きいとして，r を連続変数と考える．集団発火率の確率分布 $q(r, \alpha)$ を求めてみよう．

定理 28.1　集団発火率 r の分布は，

$$q(r, \alpha) = c \exp\left[\frac{2\alpha - 1}{2(1-\alpha)}\left\{F^{-1}(r) - \frac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha - 1}h\right\}^2\right], \tag{28.3}$$

$$F(\varepsilon; \alpha, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{h-\sqrt{\alpha}\varepsilon}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \tag{28.4}$$

証明は技術的であるから，概略を述べるにとどめる．まず，特定の $k = nr$ 個，例えばニューロン 1 から k までが発火し，残りのニューロンは発火しない

確率を考える．x_i は 2 値であるから，$\mathrm{Prob}\{x_i = 1\} = E[x_i]$ に注目する．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}\{x_1 = \cdots = x_n = 1\,;\, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}\\ &= \mathrm{Prob}\{u_i > 0, i = 1, \cdots, k\,;\, u_j < 0, j = k+1, \cdots, n\}\end{aligned} \tag{28.5}$$

は確率変数 v_i と ε による．ここで ε を固定すると，(28.2) より u_i はすべて独立になる．ε を固定して，一つの u_i が正になる条件付き確率は

$$\mathrm{Prob}\{u_i > 0|\varepsilon\} = \mathrm{Prob}\left\{u_i > \frac{h - \sqrt{\alpha}\varepsilon}{\sqrt{1-\alpha}}\right\} = F(\varepsilon), \tag{28.6}$$

負になる確率は $1 - F(\varepsilon)$ である．n 個のうち k 個のニューロンが興奮する組合せは ${}_n\mathrm{C}_k$ 個であるから，その確率は

$$\mathrm{Prob}\{r = nk|\varepsilon\} = {}_n\mathrm{C}_k \{F(\varepsilon)\}^k \{1 - F(\varepsilon)\}^{n-k} \tag{28.7}$$

となる．$q(r, \alpha)$ を求めるには，これを ε について平均すればよい．連続化に注意して計算を進めよう．2 項係数は

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi nr(1-r)}} e^{nH(r)} \tag{28.8}$$

で近似し，$r = k/n$ とおいて計算すれば，$q(r, \alpha)$ の主要項は

$$\begin{aligned}q(r, \alpha) &= nE\left[{}_n\mathrm{C}_{nr} \{F(\varepsilon)\}^{nr} \left\{1 - F(\varepsilon)^{n-nr}\right\}\right]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2}\right\} \exp\left\{n \log \frac{F(\varepsilon)}{r} + (1-r) \log \frac{1 - F(\varepsilon)}{1-r}\right\} dz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2} + nz(\varepsilon)\right\} dz,\end{aligned} \tag{28.9}$$

$$z(\varepsilon) = r \log \frac{F(\varepsilon)}{r} + (1-r) \log \frac{1 - F(\varepsilon)}{1-r} \tag{28.10}$$

となる．ここで n は十分大きいとして Laplace 近似（鞍点近似ともいう）を使うと，積分は経路に沿った最大値で置き換えてよい．$z(\varepsilon)$ を最大にする ε_0 は，

$$\frac{dz(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \left\{\frac{r}{F(\varepsilon)} - \frac{1-r}{1 - F(\varepsilon)}\right\} F'(\varepsilon) = 0 \tag{28.11}$$

から，$\varepsilon_0 = F^{-1}(r)$ で求まる．このとき $z(\varepsilon_0) = 0$ となり主要項が消え，次の副次項が出てくる．これを計算すると定理が証明される[5)]．

このモデルで，分布が入力信号 u_i の相関の強さ α に依存してどう変化していくかを見よう．$\alpha = 0$ ならば相関がなくて u_i は独立，したがって x_i も独立である．このときは大数の法則が働いて，$r = \bar{r}$ のところに一点集中した分布になる．$\bar{r}$ は一個のニューロンの発火率で，h により決まる．相関が強くなるにつれて，分布の幅が広くなるが，それでも平均値の $\bar{r}$ を中心とした一山の分布である．しかるに $\alpha = 1/2$ になると，一様分布になり，これより α を大きくすると，$r = 0$ と $r = 1$ のところに最大値を持つ 2 山の分布になる（図 28.1）．2 山分布は何を意味するのだろう．これは，あるときは非常にたくさんのニューロンが揃って発火し，他のときはどれもほとんど発火しないという状況である．

神経集団が揃って発火したりしなかったりすることを同期発火と言うが，まさにこれが出現する．このモデルは岡田のグループ[6,7]がさらに論じ，また，最近Macke ら[8]も統計物理の手法を用いて解析している．

28.2 高次相関と周辺相関座標系

高次相関を表す θ 座標を求めることは，多くのモデルで困難であった．また，実験データと照合する上で，ニューロンの数 n が大きいときはデータから θ 座標を推定することは，無理な要求と言える．そこで，次の状況を考えよう．

n 個のニューロンからなる集団から k 個のニューロンを選び，その集合を $J_k = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ とする（図 28.2）．この J_k の作る発火パターン $\boldsymbol{x}_{J_k} = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ を切り出して，その確率分布 $p(\boldsymbol{x}_{J_k})$ の集合を S_{J_k} と置こう．S_{J_k} の η 座標は，m 次 $(m \le k)$ の項は $\eta_{j_1 \cdots j_m} = E[x_{j_1} \cdots x_{j_m}]$ である．これは，J_k に属する k 個のニューロン $j_1, \cdots, j_m$ の同時発火確率であるが，n 個のニューロン全体で考えたときも，小さいモデル J_k を切り出して考えたときも同じ値である．しかし，θ 座標を見るならば，切り出したモデル S_{J_k} で計算した θ 座標 $\theta_{J_k}^{i_1 \cdots i_m}$ は，n 個のニューロンからなるモデルで同じ成分 $\theta^{i_1 \cdots i_m}$ を取ってきたものとは異なっている．θ-η 変換でもわかるように，全モデルでの $\boldsymbol{\theta}$ はすべての次数の $\boldsymbol{\eta}$ に依存している．しかし，モデル S_{J_k} では，$\boldsymbol{\theta}$ は対応する k 次以下の $\boldsymbol{\eta}$ にしかよらない．

いま，モデル S_{J_k} において，最高次の相関を表す $\theta_{J_k}^{i_1 \cdots i_k}$ を，特に $\theta^{*i_1 \cdots i_k}$ と書くことにする．$k = 1$ の 1 個のニューロンを切り出したモデルでは，各ニューロン i について，その発火率を η_i として，$\theta^{*i} = \log(\eta_i / 1 - \eta_i)$ が得られる．同じく，$k = 2$ で 2 個のニューロン i, j を取れば，その θ 座標は

$$\theta^{*ij} = \log \frac{p_{ij} p_{00}}{p_{i0} p_{0j}} = \log \frac{\eta_{ij} (1 - \eta_i - \eta_j - \eta_{ij})}{\eta_i \eta_j (\eta_i - \eta_{ij}) (\eta_j - \eta_{ij})} \tag{28.12}$$

である．ただし p_{ij} は $x_i = x_j = 1$ となる確率，p_{i0} は $x_i = 1, x_j = 0$ である確率などを表す．これを続けると，任意の J_k に対応して，そのインデックスよりなるニューロンのモデル S_{J_k} から，$\theta^{*i_1 \cdots i_k}$ が作れる．これらを集めて，全モデルにおける新しい座標系

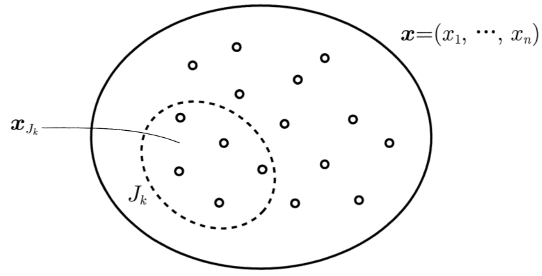


図 28.2　切り出しモデル．

$$\boldsymbol{\theta}^* = \left(\theta^{*i}, \theta^{*ij}, \cdots, \theta^{*12\cdots n}\right) \tag{28.13}$$

を作る．これは，各次数の周辺分布から作ったので，周辺 θ 座標系と呼ぶ．

周辺 θ 座標系は，残念なことに e アファイン座標系ではない．しかし，各 $\theta^{*i_1\cdots i_k}$ は S_{J_k} で見れば，その最高次の θ 座標であるから，θ 座標の性質を部分的に受けついでいる．さらに，次の直交性を有する点で，大変面白い．

定理 28.2　ある S_{J_k} を取ったときに，$\theta^{*i_1\cdots i_k}$ は，その下部の $\theta^{*j_1\cdots j_m}$，$\{j_1, \cdots, j_m\} \subset \{i_1, \cdots, i_k\}$，と直交するパラメータである．

証明　$\theta^{*i_1\cdots i_k}$ と，その下部の $\theta^{*j_1\cdots j_m}$ を考える．下部の $\theta^{*j_1\cdots j_m}$ は，J_k のニューロンの同時発火確率である $\eta_{i_1\cdots i_k}$ の関数であるが，$\{j_1, \cdots, j_m\}$ に関する η のみの関数で最高次の $\eta_{i_1\cdots i_k}$ には寄らない．ところが，S_{J_k} では，最高次の $\theta^{*i_1\cdots i_k}$ は，ここで述べた下部の η に直交している．したがって，その関数である $\theta^{*j_1\cdots j_m}$ にも直交する．

話をもう少しわかりやすくするために，低次の θ について，その通常の座標と周辺座標とを確率 $p_{i_1\cdots i_k}$ を用いて陽に書いておく．2 次では，

$$\theta^{ij} = \log \frac{p_{ij|\bar{0}}\, p_{00|\bar{0}}}{p_{i0|\bar{0}}\, p_{0j|\bar{0}}} \tag{28.14}$$

と書ける．ここに，

$$p_{ij|\bar{0}} = \mathrm{Prob}\left\{x_i = x_j = 1 \mid \text{他の } x_k \text{はすべて } 0\right\}, \tag{28.15}$$

$$p_{i0|0} = \mathrm{Prob}\left\{x_i = 1, x_j = 0 \mid \text{他 } x_k \text{は } 0\right\} \tag{28.16}$$

などを表す条件付き確率である．これに対して，周辺座標は周辺分布 p_{ij} を用いて

$$\theta^{*ij} = \log \frac{p_{ij}p_{00}}{p_{i0}p_{0j}} \tag{28.17}$$

と書ける．3 次では，それぞれ

$$\theta^{ijk} = \log \frac{p_{ijk|\bar{0}}\, p_{i00|\bar{0}}\, p_{0j0|\bar{0}}\, p_{00k|\bar{0}}}{p_{0jk|\bar{0}}\, p_{i0k|\bar{0}}\, p_{ij0|\bar{0}}\, p_{000|\bar{0}}}, \quad \theta^{*ijk} = \log \frac{p_{ijk}p_{i00}p_{0j0}p_{00k}}{p_{0jk}p_{i0k}p_{ij0}} \tag{28.18}$$

である．問題とするインデックス (i,j) または (i,j,k) 以外の他のニューロンについて，非発火の条件付きとするか，それとも周辺化するかの違いである．

$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\theta}^*$ との違いを見ると，ニューロン集団の結合について，ある程度の情報が得られる．例えば，3 ニューロンで，その発火確率が図 28.3 (a) もしくは図 28.3 (b) のような結合で決まるとしよう．図 28.3 (a) の場合は，ニューロン 3 の発火 x_3 が 0 でも 1 でも，ニューロン 1, 2 の発火に影響を及ぼさない．だから，$i, j = 1, 2$ として $p_{ij|0} = p_{ij}$ であって，ここから $\theta^{*12} = \theta^{12}$ が成立する．しかし，図 28.3 (b) の場合は，x_3 が 0 か 1 かでニューロン 1, 2 の発火確率が変わるから，$p_{ij|0} \neq p_{ij}$ であって，θ^{*12} と θ^{12} は違う．また，

$$c_{12} = \theta^{*12} - \theta^{12} \tag{28.19}$$

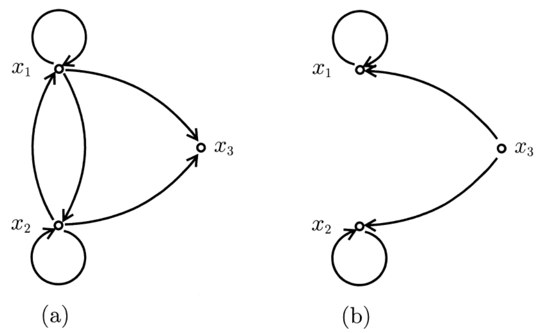


図 28.3　結合の違いを示す 2 つのモデル．

は，外部との結合に関する情報を担っている．

これは，より正確にはグラフィカルモデルの観点で述べればよい．発火パターンの確率がグラフィカルモデルに従うとき，枝が欠けていれば，それに対応する θ^{ij} は 0 になる．しかし，θ^{*ij} は必ずしも 0 にはならない．条件付き分布で相関が 0 であっても，周辺分布で見れば相関が表れる．グラフィカルモデルを用いて計算すれば，次の事実が証明できる．

定理 28.3　1) $\theta^{12} = 0$ なら，ニューロン 1, 2 は他のニューロンに関する条件付き分布が独立．2) $\theta^{*12} = 0$ ならば，ニューロン 1, 2 に関する周辺分布が独立．3) 3 ニューロンの場合，$\theta^{12} = \theta^{*12}$ ならば，$\theta^{12} \cdot \theta^{23} = 0$，つまり枝 12 か枝 23 のどちらかが切れている．

28.3 その他のスパイクモデル

すべての高次相関を持つモデルは，その次元が $2^n - 1$ で，n が大きければこれはとても扱えない．そこで，次元数の低いモデルを使いたい[9]．良く考えられるモデルは，相関は 2 次までとし，高次相関を 0 とするものである．このときは自由度は $n(n+1)/2$ ですむ．これは，これまでにもよく出てきた Boltzmann 機械である．物理学のスピンモデルもこれに他ならない．

高次相関を含むモデルとして，独立な確率分布の族を考え，その中から 2 つを取り出してその混合分布を用いるものがある[10]．

$$M = \{p(\boldsymbol{x}) : vp_1(\boldsymbol{x}) + (1-v)p_2(\boldsymbol{x})\}. \tag{28.20}$$

ここで，$p_1(\boldsymbol{x}), p_2(\boldsymbol{x})$ は共に独立な分布である．このモデルは，2 つの独立な分布を指定する $2n$ の自由度，さらにその混合の度合 v でもう一つ，計 $2n+1$ の自由度を含む．このモデルは高次相関を含む．これは，自由度 n の独立分布の空間の 2 点の混合分布からなり，独立モデルは e 平坦であるが m 平坦ではないため，混合すればこれは独立分布の空間からはみ出す．このとき，混合分布は低次の e 平坦空間には治まらず，すべての次数の高次相関を含む．

$u_1, \cdots, u_n$ が同時ガウス分布に従うとしよう．ガウス分布だから，平均と分

散ですべてが決まってしまい，パラメータの数は $n(n+1)/2$ である．ここで，前にやったように，ガウス分布の確率変数の正負の値によって 2 値の x_i を作ろう．このとき，$x_1, \cdots, x_n$ は高次相関を持つ．このような 2 値の値を取る多変量確率分布を，2 値化ガウス分布と呼ぶ．この構造は筆者らが具体的に論じたが[5)]，後に Macke らが注目して統計力学の手法を駆使して研究している[8)]．また，Yu らは[4)]，実験データを多数解析して，このモデルが高次相関を含めて現実の発火パターンの分布を良く表現することを確かめている．

島崎らは[2)]，発火パターンの分布は情報処理が進行すると共に変化すると考え，高次相関の係数が時間と共に変動するとした．このとき，高次相関が時間と共に変化するモデルを仮定し，カルマンフィルターの手法を用いて分析を行い，高次相関がどのように変わっていくかを実験データから推定して，興味ある結果を得ている．

28.4 ニューロン発火時間の分布：セミパラメトリック統計モデル

少し話題を変えて，一個のニューロンを取り上げ，そのスパイクが発生するタイミングを考察しよう．いま，スパイクが時間 $t_1, t_2, \cdots$ に発生したとして，その時間間隔を $T_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = 1, 2, \cdots$ とおく（図 28.4）．発火率が高ければ，時間間隔は短い．一番単純な発火タイミングモデルは，スパイクは発火率に応じて，各時点で発生するか否かが独立に決まるもので，スパイク間隔は指数分布

$$q(T, \xi) = \xi \exp\{-\xi T\} \tag{28.21}$$

に従う．ここで，ξ は発火率である．発火スパイク数はポアソン分布になる．

現実のニューロンは，不応期などの生理的な仕組みにより，発火のタイミングが独立にはならない．時間間隔 T の分布を記述する簡単なモデルはガンマ分布で，発火率の他にもう一つ波形パラメータと呼ばれるパラメータ κ を含み，

$$q(T, \xi, \kappa) = \frac{(\xi\kappa)^\kappa}{\Gamma(\kappa)} T^{\kappa-1} \exp\{-\xi\kappa T\} \tag{28.22}$$

のように書ける．多くの場合，これが良く合うことが知られている．T の期待値と分散は，$E[T] = 1/\xi, \mathrm{Var}[T] = 1/\kappa\xi^2$ である．ξ は発火率で，κ はスパイク列の不規則性を表すパラメータで，これが大きければスパイク列は等時間間隔で発生する規則的に生成されるものに近づき，$\kappa = 1$ ならランダムなポアソン系列，$\kappa < 1$ ならば T は大きいときと小さいときがいろいろあるより不規則

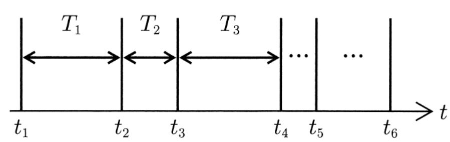


図 28.4　ニューロンの発火時刻と発火時間間隔．

なものになる．

パラメータ κ はニューロンの種類によって違うから，スパイク列を観測して κ を推定すると，ニューロンの種類がわかって都合が良い．観測データ $\{T_1, \cdots, T_n\}$ があったときに，これを分布 (28.22) からの独立なサンプルと見て，ここから ξ と κ を推定するのは単純な統計の問題である．しかしそうは簡単にいかない事情がある．現実の測定では，発火率 ξ は一定ではなく，測定が進むにつれて変化する．我々の目的は ξ ではなくて κ を知ることである．これはまさに前に調べたセミパラメトリック統計モデルになっている[11)]．

ξ が未知で変動する場合，これを局外母数として，推定関数を用いて κ の推定を行う[12)]．実は，秤のモデルと同じで，各回の測定で ξ が変動する状況では，不偏な推定関数は存在しない．そこで，T は m 回測る間は変化しないとして，測定を m 回まとめて一つの単位とする．このときの確率モデルは，$\boldsymbol{T} = \{T_1, \cdots, T_m\}$ として

$$q(\boldsymbol{T}, \xi, \kappa) = \prod_{i=1}^{m} q(T_i, \xi, \kappa) \tag{28.23}$$

である．ここで，対数確率を関心のあるパラメータ κ で微分した u スコア，局外母数 ξ で微分した局外スコア v

$$u(\boldsymbol{T}) = \frac{\partial \log q(\boldsymbol{T}, \xi, \kappa)}{\partial \kappa}, \quad v(\boldsymbol{T}) = \frac{\partial \log q(\boldsymbol{T}, \xi, \kappa)}{\partial \xi} \tag{28.24}$$

を求め，情報スコアを計算する．この場合情報スコアは

$$u^I(\boldsymbol{T}, \kappa) = \sum \log T_i - m \log \left(\sum T_i \right) + m\phi(mk) - m\phi(\kappa) \tag{28.25}$$

と陽に求まる．ただし $\phi(\kappa) = (d/d\kappa)\Gamma(\kappa)$ はダイガンマ関数である．うまいことに，これは ξ を一切含まない．だから，最適な推定関数であり，これを用いて多数回の観測 $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \cdots$ の推定方程式

$$\sum u^I(\boldsymbol{T}_i, \kappa) = 0 \tag{28.26}$$

を解く．その解は，ξ_i が各回でどんな値であろうと Fisher 有効で，漸近的に最適な推定である．いま，$m = 2$ として，相続く 2 時間区間 T_i, T_{i+1} は同じ発火率（未知）であったと想定しよう．このとき，推定方程式に必要な統計量は

$$S_I = -\frac{1}{n-1} \sum_i \frac{1}{2} \log \frac{4T_i T_{i+1}}{(T_i + T_{i+1})^2} \tag{28.27}$$

である．これを用いるのが効率の意味で一番良い．

篠本らは紆余曲折の末，推定に都合の良い統計量として

$$L_V = 3 - \frac{12}{n-1} \sum \frac{T_i T_{i+1}}{(T_i + T_{i+1})^2} \tag{28.28}$$

を提案している[13)]．面白いことに S_I と L_V は，共に相続く 2 つの時間間隔の関数 $4T_i T_{i+1} / (T_i + T_{i+1})^2$ に関係している．S_I はそれらの幾何平均を使うのに対し，篠本らの L_V は算術平均となっている[13)]．推定の効率やバイアスは S_I

を用いたほうが良い．しかし幾何平均はロバスト性では欠点があるかもしれない．その点では L_V のほうが良いかもしれない．篠本らは[13)]，脳のいろいろな部分からの測定データを用いて，種々のニューロンの κ の値を求めている．

28.5 推定と情報損失：モデルの不適合とデータの消去

脳内では，外界の情報に起因して神経発火のパターン $\boldsymbol{x}$ が生ずる．ここでは，各 x_i はスパイクではなくてスパイクの頻度，つまり発火率を表すアナログ量でもよいものとする．発火の時空間パターンをもとに外界の情報を推定し，決定を下すのが脳である．単純なモデルとして，外界の情報を連続パラメータ s で表し，s が与えられたときにパターン $\boldsymbol{x}$ が生起する確率を $p(\boldsymbol{x}, s)$ と書く．$\boldsymbol{x}$ を観測してここから s を推定する問題を考えよう．話を具体的にするために，確率分布は曲指数型分布族であるとし，

$$p(\boldsymbol{x}, s) = \exp\{\boldsymbol{\theta}(s)\cdot\boldsymbol{x} - \psi\} \tag{28.29}$$

のように書けているとする．もととなる指数型分布族全体の空間を S，モデル (28.29) の空間を M とする．外部情報 s によって，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ が $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(s)$ で決まるモデルである．独立な $\boldsymbol{x}$ が多数観測できる場合は確率は積になり，観測値から十分統計量 $\bar{\boldsymbol{\eta}} = (1/N)\sum \boldsymbol{x}_i$ が決まり，観測点の η 座標は $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ である．推定は，観測データが定める S の中の観測点 $P = (\bar{\boldsymbol{\eta}})$ を，M に射影する．最尤推定は P を M へ m 射影することで得られる．これは漸近的には最良の推定で，その時の誤差の分散は，Fisher 情報量の逆行列を観測数で割ったものである．

脳の中では，都合よく最尤推定が行なえるわけでもないだろう．これには 2 つの障害が考えられる．脳の中では観測されたデータのすべてを保持しておくのは難しく，情報の損失が起こる．例えば，ニューロン発火の頻度やニューロン間の相関は保持できても，高次相関までは手が回らず，これを捨ててしまうかもしれない．このとき，s の推定量の精度が落ちるが，その損失はどのくらいであろうか．この場合から考えよう．

$\bar{\boldsymbol{\eta}}$ の一部，例えば成分 $\bar{\eta}_k$ などが失われた場合，観測点 P は特定できない．この場合，$\bar{\eta}_k$ を勝手な値で補えば，その値に応じた観測点が決まり，その全体は観測多様体 D をなす．つまり，観測されない変数がある場合の推論に帰着できる．推論は，観測多様体 D とモデル M の間の KL ダイバージェンスを最小にする s を求めることになる．このとき，Fisher 情報量で計った情報損失が計算できる．例えば，高次相関を無視するとどの程度の損失があるかを計算できる．これは，モデル M を与える $\boldsymbol{\theta}(s)$ の形による．具体的な計算が大泉らの論文[14)] で行われている．

脳の中で観測情報が保持されていても，最尤推定が行われているとは限らない．脳は，M よりずっと単純なモデルを想定し，これを使って s を求めているかもしれない．簡単なモデルを M' としよう．例を挙げよう．n 個のニューロンが場に並んでいて，刺激 s が生起すると，ニューロン i は $r_i(s)$ の頻度

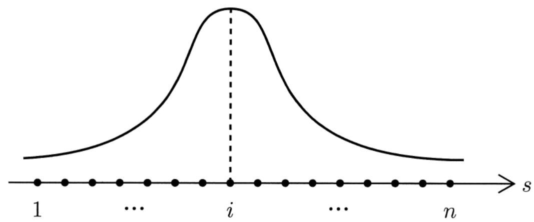


図 28.5　ニューロン i の同調曲線.

で発火するものとする．$r_i(s)$ はニューロン i の同調曲線（チューニングカーブ）と呼ばれ，刺激 s に対するこのニューロンの応答を表す．一般にはニューロン i の置かれた場所と s との対応が付いていて，刺激 $0 < s < 1$ が来ると $i = ns$ の位置のニューロン i が強く興奮し，その周りのニューロンも興奮するがそれは次第に小さくなっていく（図 28.5）．実際のニューロンの応答を興奮頻度 x_i で表す．これらは同時ガウス分布に従うものとし，ニューロン i, j の応答 x_i, x_j の相関を V_{ij} としよう．このとき，確率モデルは

$$p(\boldsymbol{x}, s) = c \exp\left\{-\frac{1}{2}\{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(s)\}' V^{-1} \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(s)\}\right\} \tag{28.30}$$

と書ける．

興奮パターン $\boldsymbol{x}$ が与えられたとき，確率 (28.30) を最大にする s を求めるのが最尤推定である．しかし，その計算は一般に複雑である．そこで，モデルを簡単化して相関のない，非忠実なモデル

$$q(\boldsymbol{x}, s) = c \exp\left[-\frac{1}{2}\{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(s)\}' \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(s)\}\right] \tag{28.31}$$

を用いて，これを最大にする s を求めてみよう．このとき，どのくらいの情報損失が起こるだろうか．Wu らは[15]，ある場合に非忠実なモデルを用いても，漸近的には情報損失がないことを導いた．それならば，簡単なモデルを用いて推定を行うのが得である．

話を一般的にして，忠実なモデル M と非忠実なモデル M' とが，共にパラメータ s を持つ曲指数型分布族だとしよう．両者は同じ座標 s で指定され s が同じ点どうしで対応が付く．M を使って推論しても M' を使って推論しても，漸近的一致推定量が得られる条件は，

$$E_p\left[\frac{d \log q(\boldsymbol{x}, s)}{ds}\right] = 0 \tag{28.32}$$

であるが，M' のパラメータの付け方はこのように調整しておかなければならない．このとき，データの与える $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ を M に m 射影すれば真の最尤推定量が，M' に射影すれば非忠実なモデルを用いた推定量となる．M と M' で同じ s どうしを結ぶ m 測地線が M と M' の両方に直交していれば，どちらで推定しようと推定量は同じものになり，情報損失は起こらない．もし，違えば，情報損失が起こる．非忠実なモデルの場合の情報量（誤差の分散行列の逆行列）も，確率を用いて陽に計算できる[14]．非忠実なモデルとして，どのようなものを用

いれば情報損失が少ないかがここからわかる．

終わりの一言

脳の理論に情報幾何を応用するのは，確率的な構造を調べる限り自然の成り行きである．優秀な若手が大勢研究に携わっている現在，彼らに太刀打ちするには彼らの知らない武器が必要であると，私はひそかに考えた．高次相関を中心に，情報幾何の考えはすこしずつ広がってきているが，まだそう成功しているとはいえないかもしれない．

参考文献

1) H. Nakahara, S. Amari, Information-geometric measure for neural spikes, *Neural Computation*, **14**, 2269–2316, 2002.
2) H. Shimazaki, S. Amari, E.N. Brown and S. Grün, State-space analysis of time-varying higher-order spike correlation for multiple neural spike train data, *PLOS Computational Biology*, **8**, 3, e1002385, 2012.
3) I.E. Ohiorhenuan, F. Mechler, K.P. Purpura, A.M. Schmid, Q. Hu, and J.D. Victor, Sparse coding and high-order correlations in fine-scale cortical networks, *Nature*, **466**, 617–621, 2010.
4) S. Yu, H. Yang, H. Nakahara, G. Santos, D. Nikolic and D. Plenz, Higher-order interactions characterized in cortical activity, *Journal of Neuroscience*, **31**, 17514–17526, 2011.
5) S. Amari, H. Nakahara, S. Wu and Y. Sakai, Synchronous Firing and Higher-Order Interactions in Neuron Pool, *Neural Computation*, **15**, 127–142, 2003.
6) K. Hamaguchi, M. Okada, M. Yamana and K. Aihara, Correlated firing in a feed-forward network with Mexican-hat type connectivity, *Neural Computation*, **17**, 2034–2059, 2005.
7) M. Yamana and M. Okada, Correlation of firing in layered associative neural networks, *Journal of the Physical Society of Japan*, **74**, 2260–2264, 2005.
8) J.H. Macke, M. Opper and M. Bethge, Common input explains higher-order correlation and entropy in a simple model of neural population activity, *Physical review Letters*, **106**, 208102, 2011.
9) H. Nakahara, S. Amari and B. Richmond, A Comparison of Descriptive Models of a Single Spike Train by Information-Geometric Measure, *Neural Computation*, **18**, 545–568, 2006.
10) S. Amari, Conditional Mixture Model for Correlated Neuronal Spikes, *Neural Computation*, **22**, 7, 1718–1736, 2010.
11) K. Ikeda, Information geometry of interspike intervals in spiking neurons, *Neural Computation*, **17**, 2719–2735,2005.
12) K. Miura, M. Okada and S. Amari, Estimating Spiking Irregularities Under Changing Environments, *Neural Computation*, **18**, 10, 2359–2386, 2006.
13) S. Shinomoto, Y. Miyazaki and S. Koyama, A measure of local variation of inter-spike intervals, *Biosystems*, **79**, 67–72, 2005.
14) M. Oizumi, M. Okada and S. Amari, Information loss associated with imperfect observation and mismatched decoding, *Frontiers in Computational Neuroscience*, **5**, 9, 1–13, March 2011, doi: 10.3389/fncom.2011.00009 (www.frontiersin.org).
15) S. Wu, S. Amari and H. Nakahara, Population Coding and Decoding in a Neural Field: A Computational Study, *Neural Computation*, **14**, 999–1026, 2002.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

特　集（2014年3月号予告）

幾何学における様々な発想

いかにして空間をとらえるか

本体952円

特　集（2014年1月号）

波と粒子

「光子の裁判」を通して見る量子の不思議

本体952円

編集後記

物理に限らず基礎科学を勉強・研究する上でモチベーションの一つとなるのが，日常にどう応用していくか，かと思います．今回の特集では物理の理論がどのように利用されているかを取り上げましたが，今回取り上げたテーマ以外にも“利用されている物理”はあるかと思います．

皆さんも身の周りで利用されている物理を探してみてはいかがでしょうか．(R)

＊　　　＊

物理の基礎理論が意外なところで応用され，私達の暮らしや更なる研究を支えていることが各記事で紹介されています．

最近，当時は何となくしていた小中学校の勉強も，社会人になりその必要性に気づかされることがよくあります．基礎が今後いかに活かされるかという視点で学ぶことも必要なのかもしれません．(T)

数　理　科　学　2月号

2014年2月1日発行

数理科学編集部　　　発行人　木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）

〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁